

SUBDIRECCION DE CALCULO ESTRUCTURAL

DEPARTAMENTO DE ESTATICA

CALCULO DE ESTRUCTURAS AERONAUTICAS

(Partes I y II)

José Carlos Gómez López

1.991

Prefacio

Podría pensarse que sería innecesario preparar un curso sobre Estructuras Aeronáuticas dirigido a Ingenieros Aeronáuticos que desarrollan su labor profesional en una Empresa dedicada a la construcción aeronáutica, dado que los destinatarios del curso habrían adquirido ya durante su formación universitaria y su experiencia profesional los conocimientos suficientes para poder considerar como perdido el tiempo que se dedique a dicho curso.

No obstante, en la actualidad, la búsqueda de una mayor productividad da lugar a una especialización profesional cada vez mayor, así como a la utilización cada vez más profusa de herramientas informáticas.

La especialización profesional, si bien permite adquirir unos conocimientos y una experiencia profundos sobre una determinada área, sin embargo presenta el inconveniente de perder la idea del comportamiento global de la estructura. La utilización de herramientas informáticas, si bien permite resolver los problemas con una mayor seguridad y rapidez, sin embargo presenta el inconveniente de perder la idea del comportamiento físico de la estructura que se está analizando.

Pensamos que estos dos inconvenientes son graves, ya que, por una parte, el analizar una determinada parte de la estructura, olvidándonos de las posibles interacciones e influencias que pueda tener con el resto del avión, puede dar lugar a resultados desastrosos; y por otra parte, un Ingeniero no debe convertirse en un mero introductor de datos y recopilador de resultados de un programa de ordenador, sino que ha de tener siempre muy presente cómo debe comportarse la estructura a fín de poder determinar adecuadamente los datos que ha de introducir en el programa, y de analizar correctamente los resultados obtenidos del mismo.

Es por todo ésto por lo que pensamos que es totalmente necesario el impartir un curso que dé una visión global de la estructura de un avión. Y con este objetivo se ha pensado el curso: no se trata tanto de profundizar en un determinado tema, lo cual puede ser objeto de otros cursos más especializados, como de presentar de forma global las diferentes partes de que se compone un avión; cómo trabajan y cómo se analizan.

Por otra parte, conviene señalar que este curso también presenta un gran interés para los ingenieros dedicados directamente a tareas relacionadas con fabricación, dado que les permitiría adquirir una buena base sobre cómo trabajan y cómo se calculan los diferentes componentes del avión, lo cual sería de gran utilidad en el desarrollo de su trabajo.

El curso está dividido en tres partes fundamentales:

- La primera parte está dedicada a dar una idea general y somera de los diferentes elementos de que se compone un avión: de qué materiales están compuestos, qué cargas actúan sobre ellos, cómo trabajan y cómo se fabrican.

- La segunda parte está dedicada a presentar los procedimientos utilizados tradicionalmente para obtener esfuerzos sobre los diferentes componentes del avión a partir de las cargas que actúan sobre ellos. Estos procedimientos han quedado actualmente desplazados por los métodos más exactos utilizados por los programas de elementos finitos; sin embargo no es conveniente olvidarlos

a fín de tener presente cuál debe ser el comportamiento esperado de la estructura lo que nos permitirá poder modelizarla adecuadamente y determinar si los resultados obtenidos son "lógicos" o no.

- La tercera parte está dedicada a presentar cuáles son los procedimientos utilizados en la actualidad en la división de Proyectos de C.A.S.A. para realizar la comprobación de resistencia de los diferentes componentes del avión. En esta parte se indicarán los fundamentos teóricos, así como la utilización de las Normas del Manual de Diseño y de los Programas de ordenador existentes en la actualidad.

Debido a su extensión, este curso se dará en dos fases. Las dos primeras partes anteriormente enunciadas formarán el contenido de la primera fase del curso, dejando la tercera parte para un curso posterior.

Indice de Materias

Parte I
INTRODUCCION GENERAL

Capítulo 1

Evolución de las estructuras aeronáuticas

En el corto periodo de tiempo que ha transcurrido desde que en 1903 los hermanos Wright realizaron su primer vuelo hasta nuestros días, la aviación ha experimentado unos cambios enormes. Estos cambios han afectado, en general, a todas las ramas de la ingeniería aeronáutica, y, en particular, a las estructuras aeronáuticas. Estas, en realidad, sólo han dado un paso hacia adelante, pero ha sido de tal importancia que ha cambiado totalmente el aspecto y el carácter de los aviones.

1.1 Estructuras arriostradas con cable

La estructura del avión con el que los hermanos Wright realizaron su primer vuelo estaba formada a base de armaduras rectangulares de madera a las que se daba rigidez por medio de unos cables tensados de esquina a esquina que evitaban que se descruadaran (ver figura 1.1).

Aunque estos métodos no eran originales, había en ellos dos cosas ingeniosas desde el punto de vista estructural: en primer lugar, la idea de que con dos alas, una encima de la otra, se conseguiría una estructura más ligera y más fuerte que con el tipo de configuración de una sola ala sugerida por la de los pájaros; y en segundo, la idea de que un rectángulo podía mantener su forma con dos ligeros cables mejor que con un elemento diagonal más pesado.

En aquel entonces y durante los siguientes 30 años, la madera fue el material estructural básico utilizado en la construcción aeronáutica; al principio se utilizó el bambú, y después principalmente el abeto, un tipo de madera ligero, de grano recto y medianamente fuerte.

El arriostrado continuó usándose durante muchos años como una característica importante en la construcción aeronáutica. Las figuras 1.2 y 1.3 muestran su uso extensivo en los primeros cazas y la figura 1.4 lo hace más evidente en la era de los aviones metálicos (los aviones mostrados en estas figuras son un buen ejemplo, pues muestran la progresión en el diseño del mismo fabricante, *Sopwith Aviation Co.*, que se convirtió en *Hawker* en 1920).

Las estructuras de doble ala o biplanos (figuras 1.1, 1.2 y 1.3) dominaron los diseños de aviones durante muchos años y todavía se usan actualmente para algunas necesidades particulares, tales como en aviones de acrobacia o agrícolas de

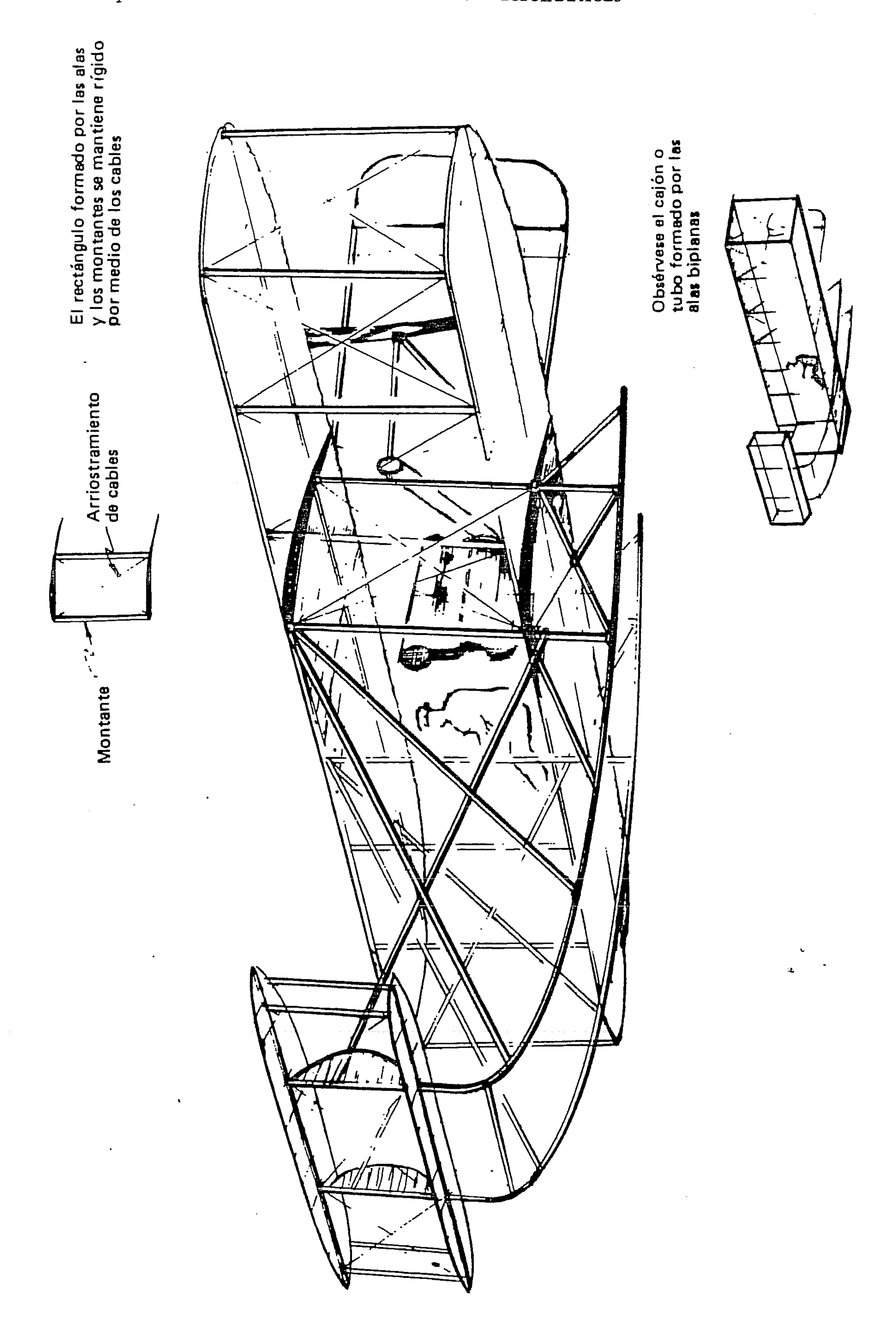


Figura 1.1: Máquina voladora de Wright. 1903

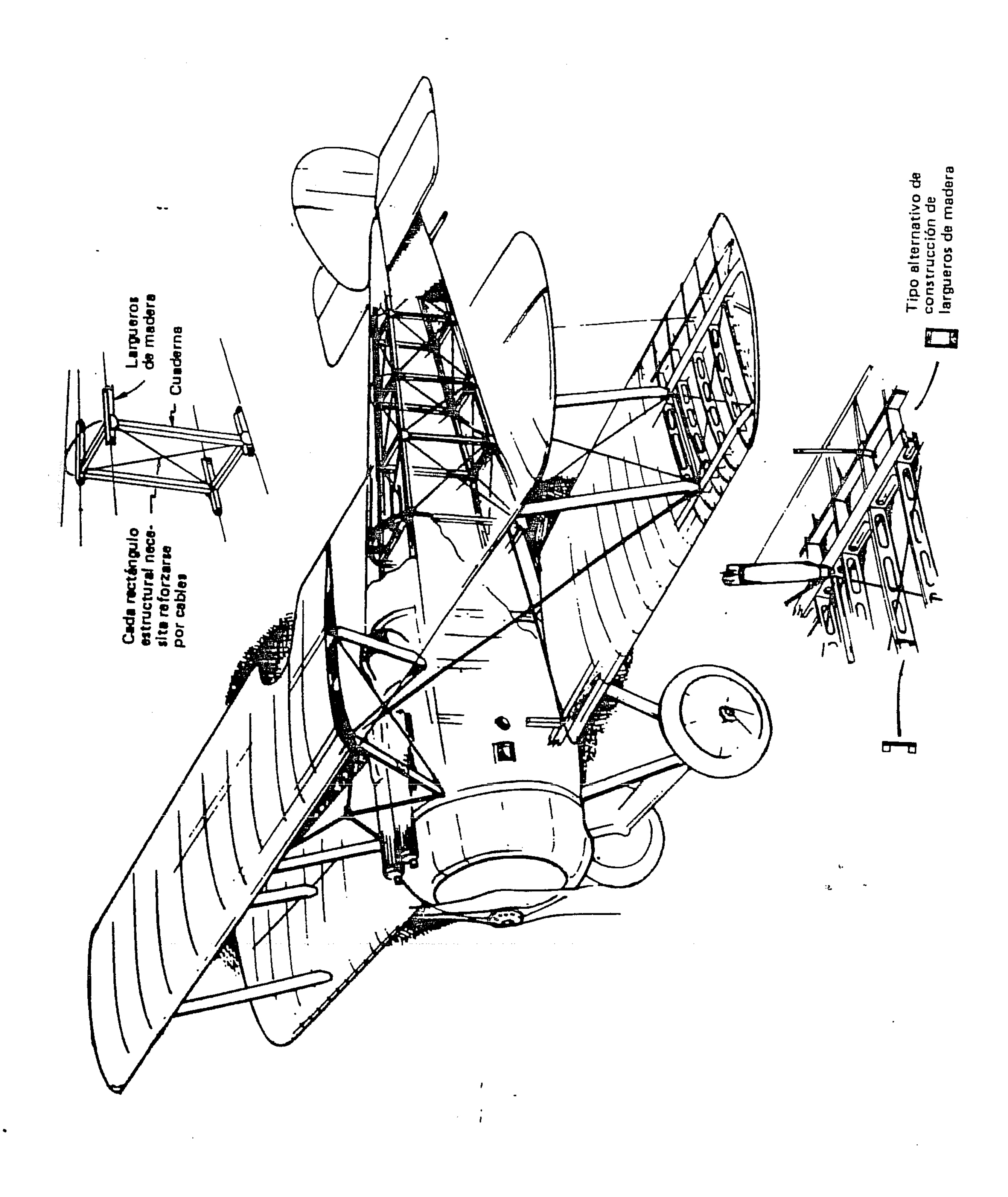


Figura 1.2: *Sopwith Camel.* 1917

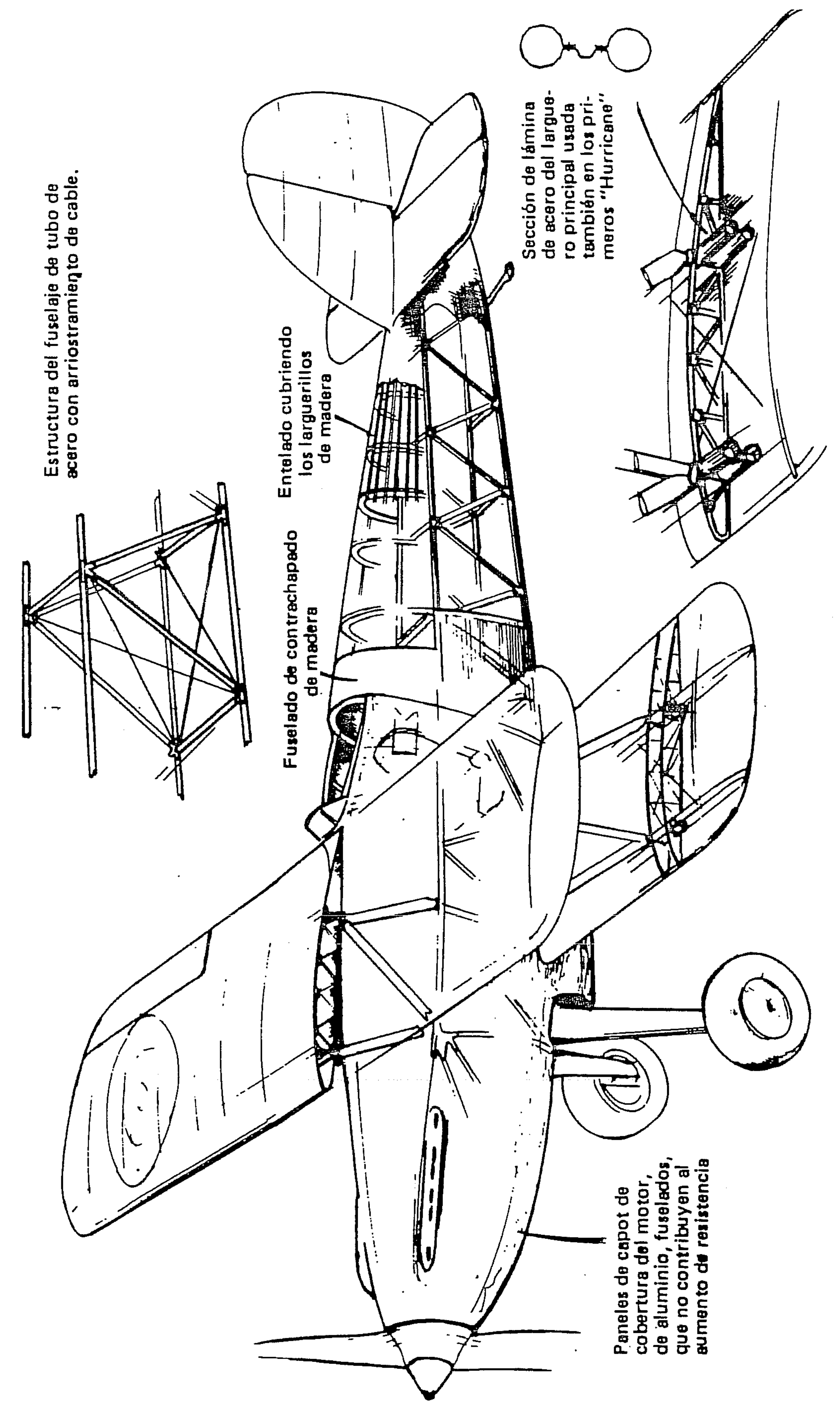


Figura 1.3: *Hawker Fury*. 1931

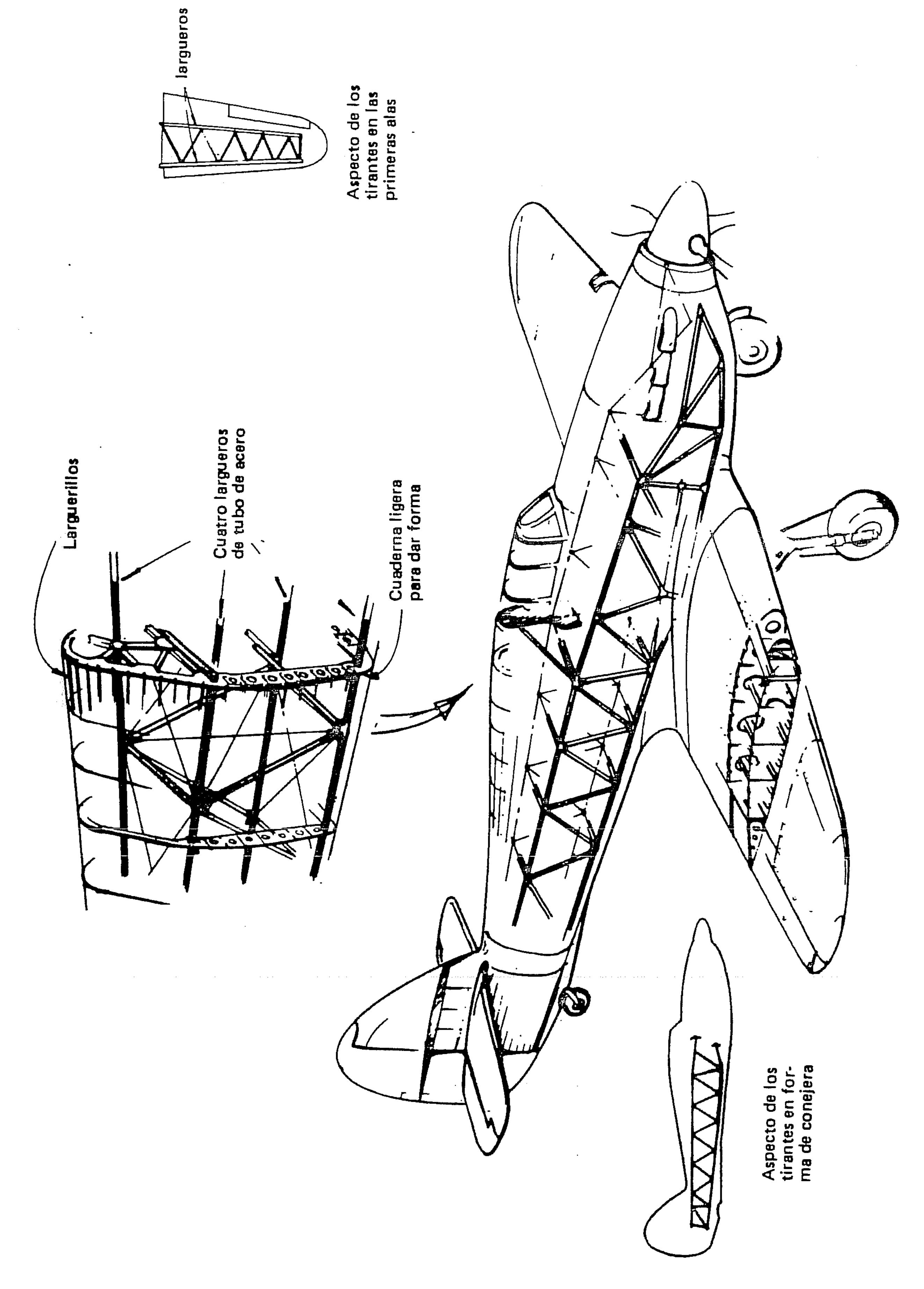


Figura 1.4: *Hawker Hurricane*. 1935

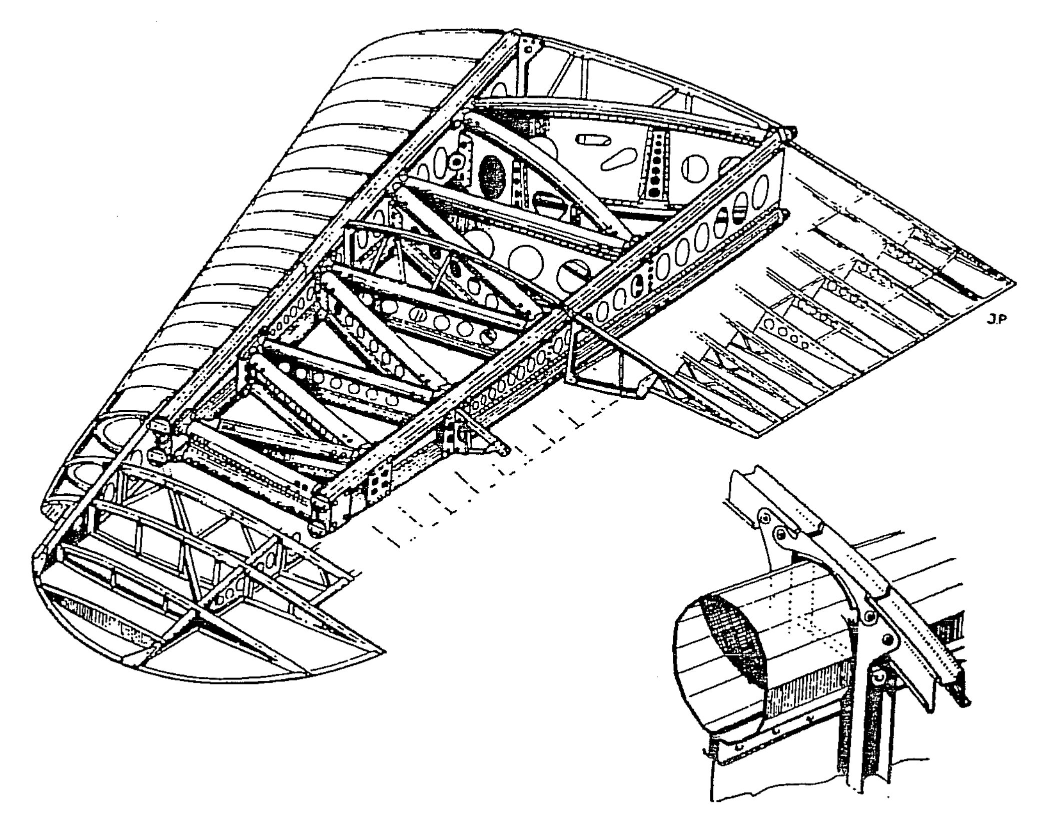


Figura 1.5: Construcción del ala del *Hawker Hurricane*

fumigación. La ventaja estructural de este tipo de configuración de ala es que la combinación formada por las alas superior e inferior, los montantes verticales entre las mismas y los cables de arriostramiento forma en conjunto un elemento realmente ligero, el cual es a la vez muy rígido y resistente a la flexión y torsión.

La era del biplano duró hasta mediados los años 30, época en la que la construcción de madera empezó a reemplazarse por la metálica. Compárense, por ejemplo, los biplanos de las figuras 1.2 y 1.3: su construcción es muy similar, pero en el segundo los elementos principales del fuselaje así como los largueros del ala son tubos de acero. A mediados de los años 30 el metal había sustituído casi por completo a la madera y los aviones biplanos habían dejado paso a los monoplanos, buscando cada vez mejores actuaciones en los aviones. Sin embargo, las estructuras seguían siendo arriostradas con cables. Si se comparan las estructuras del *Sopwith Camel* de 1917 (figura 1.2) y del *Hurricane* de 1935 (figura 1.4), se puede observar que, a pesar de que ya se ha dado el paso de la madera al metal y del avión biplano al monoplano, muestran algunos parecidos relevantes: los elementos principales de los fuselajes de ambos aviones estaban hechos con cuatro elementos longitudinales, llamados *larguerillos principales* ("*longerons*"), y el arriostramiento con cables es ampliamente empleado en ambos. Por otra parte, en los aviones monoplanos el revestimiento del ala seguía siendo entelado. Debido a ello, para resistir los esfuerzos originados por la flexión y la torsión, se idearon estructuras tan extrañas como la mostrada en la figura 1.5, correspondiente al *Hurricane* de 1935. Este diseño duró poco tiempo, pasándose pronto al revestimiento metálico.

1.2 Estructuras semi-monocasco

Cuando los aviones tuvieron que hacerse lo suficientemente grandes para transportar viajeros, se hizo imposible el seguir utilizando el tipo de estructura basado en el arriostramiento con cables. De hecho, durante algún tiempo habían estado volando aviones con otro tipo de estructura mucho más adecuada. Se trataban de los hidroaviones tipo *bote volador*. Los fuselajes de estos primitivos hidroaviones de madera estaban hechos de acuerdo con los más altos estándares de la construcción de barcos con casco de madera. Estaban construídos con tablones de madera, estando el exterior pulido y con un acabado de barniz. Este tipo de construcción presentaba un fuselaje interior mucho más diáfano y utilizable. Las armaduras de madera y contrachapado pasaron de estos hidroaviones a los aviones, obteniéndose algunos aviones bastante bien conseguidos en comparación con las formas rectas típicas de los fuselajes arriostrados con cables. Desde el punto de vista de la ingeniería, la ventaja principal del tipo de construcción naval es que el revestimiento forma una parte integrante de la estructura, al contrario de lo que ocurre con los aviones arriostrados, en los que la tela de recubrimiento no añade nada a la resistencia estructural. Como en este tipo de construcción el revestimiento también resiste cargas, se le suele denominar *revestimiento resistente*. A las estructuras que presentan este tipo de construcción se las suele conocer como *estructuras semi-monocasco*, en donde la palabra *mono* significa "todo en una pieza", "integral", y *semi* es una añadidura para indicar que este tipo de construcción utiliza armadura interna a diferencia de las *estructuras monocasco* en las que todas las cargas son resistidas por el revestimiento.

La adopción de este tipo de construcción, junto con el cambio de material de madera a metal, constituyó el paso más fundamental que han sufrido las estructuras aeronáuticas desde los primeros días de la aviación. La simplicidad y elegancia de este método de proyecto y la influencia que tuvo en la forma y el aspecto del avión se muestran en la figura 1.6. El *Douglas DC.3* no fue el primer avión totalmente metálico con revestimiento resistente, pero es un ejemplo brillante de una nueva tecnología que fructificó en un éxito práctico de ingeniería y creó normas y métodos de proyecto estructural que han estado vigentes durante décadas y parece ser que continuarán durante algunas generaciones.

Poco después, las estructuras semi-monocasco se emplearon también en las alas. Ya en 1930, la industria aeronáutica norteamericana estaba dando muestras de dominio en la construcción de aviones civiles y estaba adquiriendo una gran experiencia en el diseño de estructuras con revestimiento resistente para fuselajes de gran capacidad. La industria europea se preocupaba más de la aviación militar y de los secretos que ello conllevaba y continuó diseñando estructuras arriostradas durante, tal vez, dos generaciones de aviones (de 5 a 7 años en aquel tiempo), más tiempo del que hubiera sido necesario. Para ser justos, había un problema de tamaño: si se intentaba reducir un ala del *DC.3* a unas dimensiones adecuadas para un avión de caza, la chapa de aluminio utilizada para la construcción tendía a volverse incontrolablemente fina y débil. Sin embargo, algunas oficinas de proyecto europeas, especialmente *Messerschmitt* y *Supermarine*, se enfrentaron con el problema y a mediados de los años 30 hicieron alas con revestimiento resistente muy eficientes para aviones pequeños.

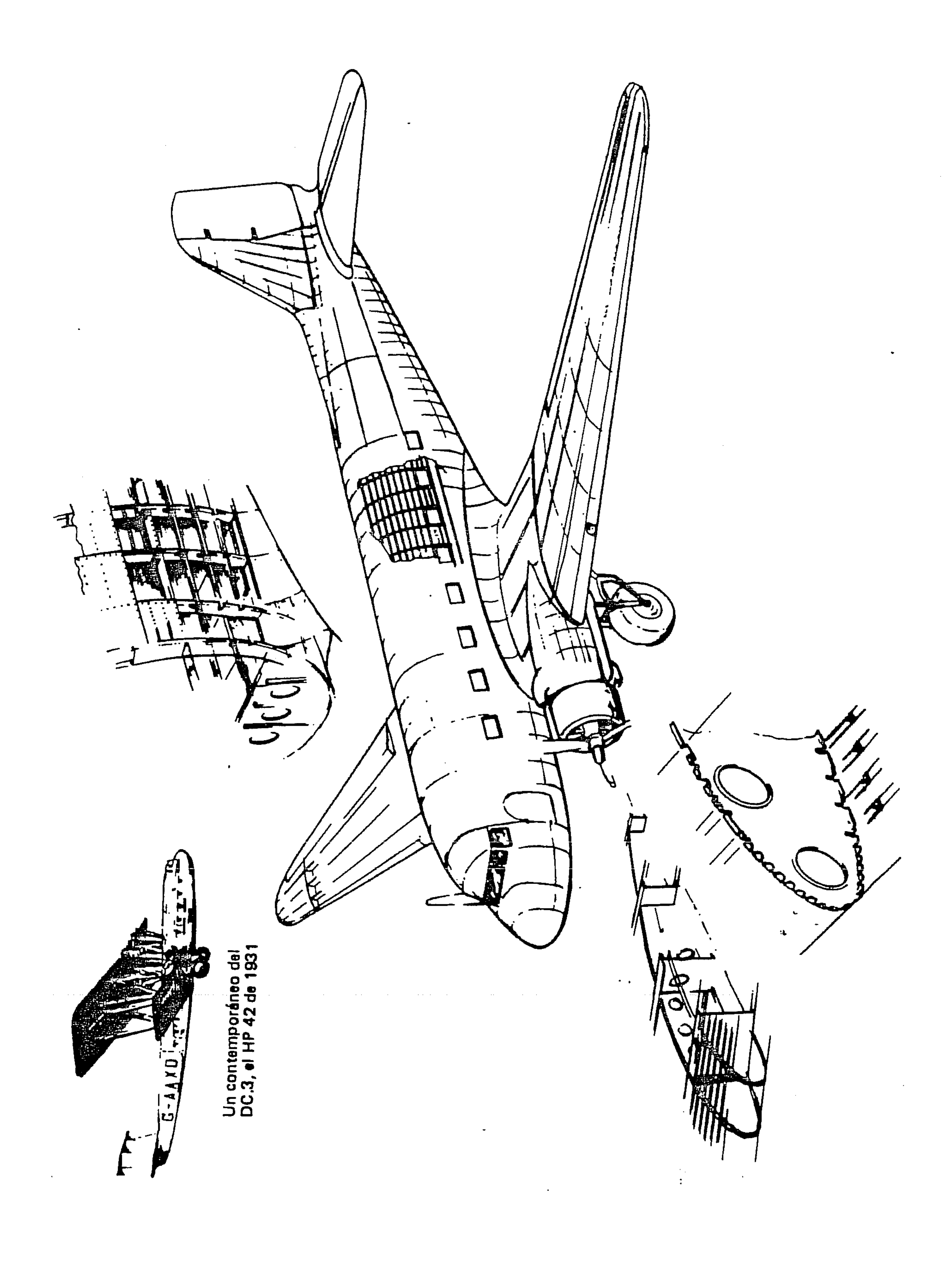


Figura 1.6: *Douglas DC.2/3.* 1933

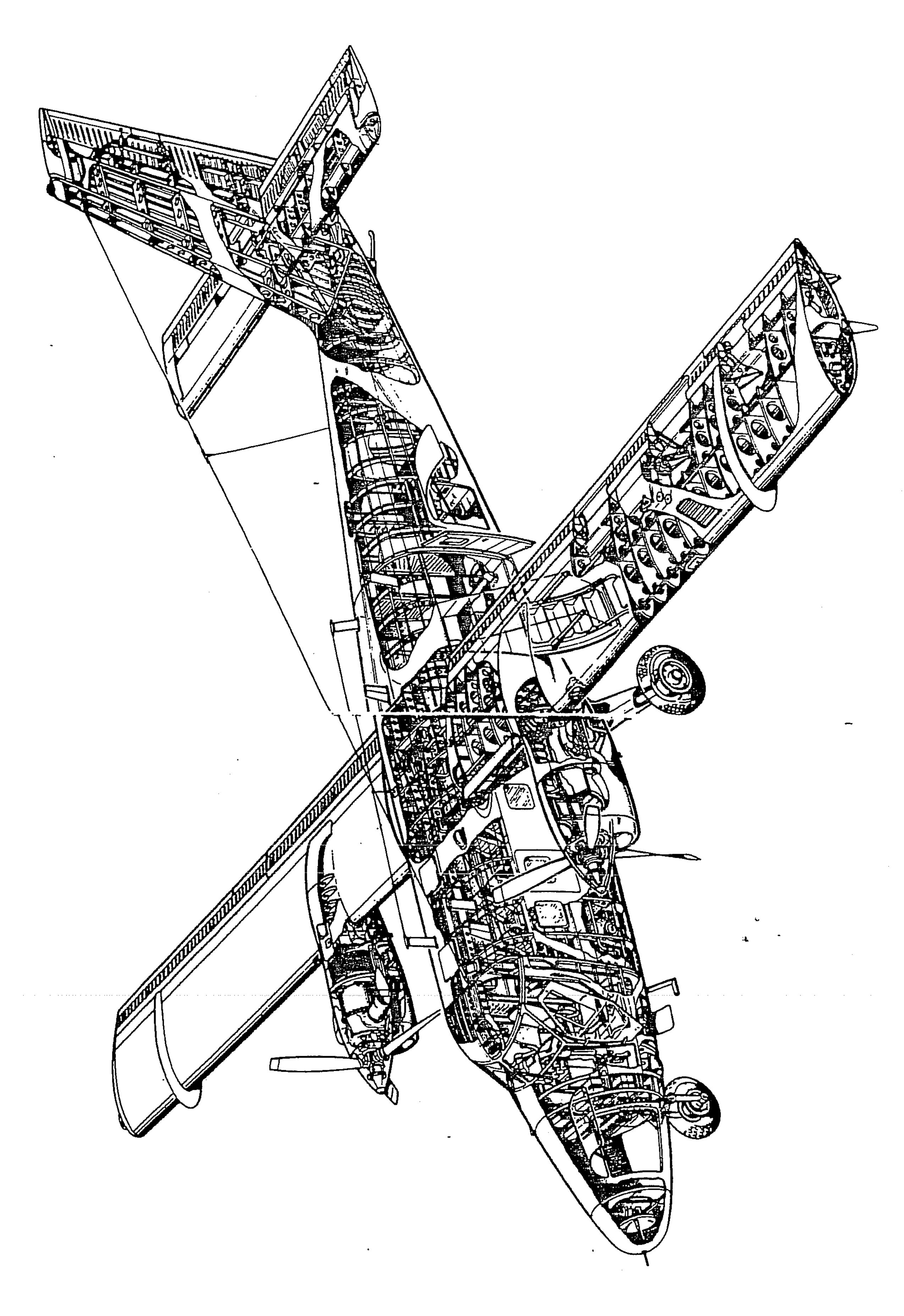


Figura 1.7: *De Havilland Canada. Twin Otter*

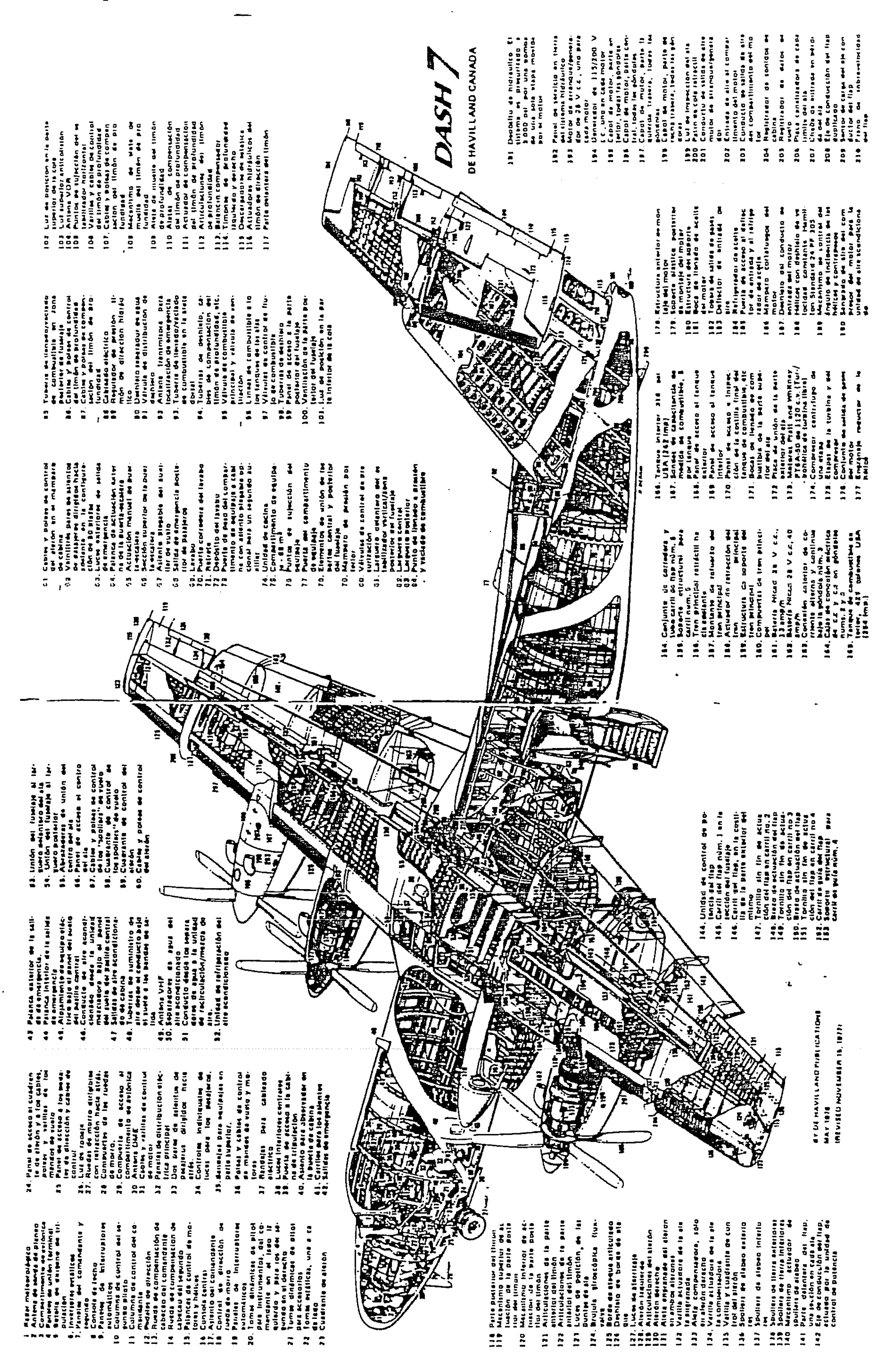


Figura 1.8: *De Havilland Canada. Dash 7*

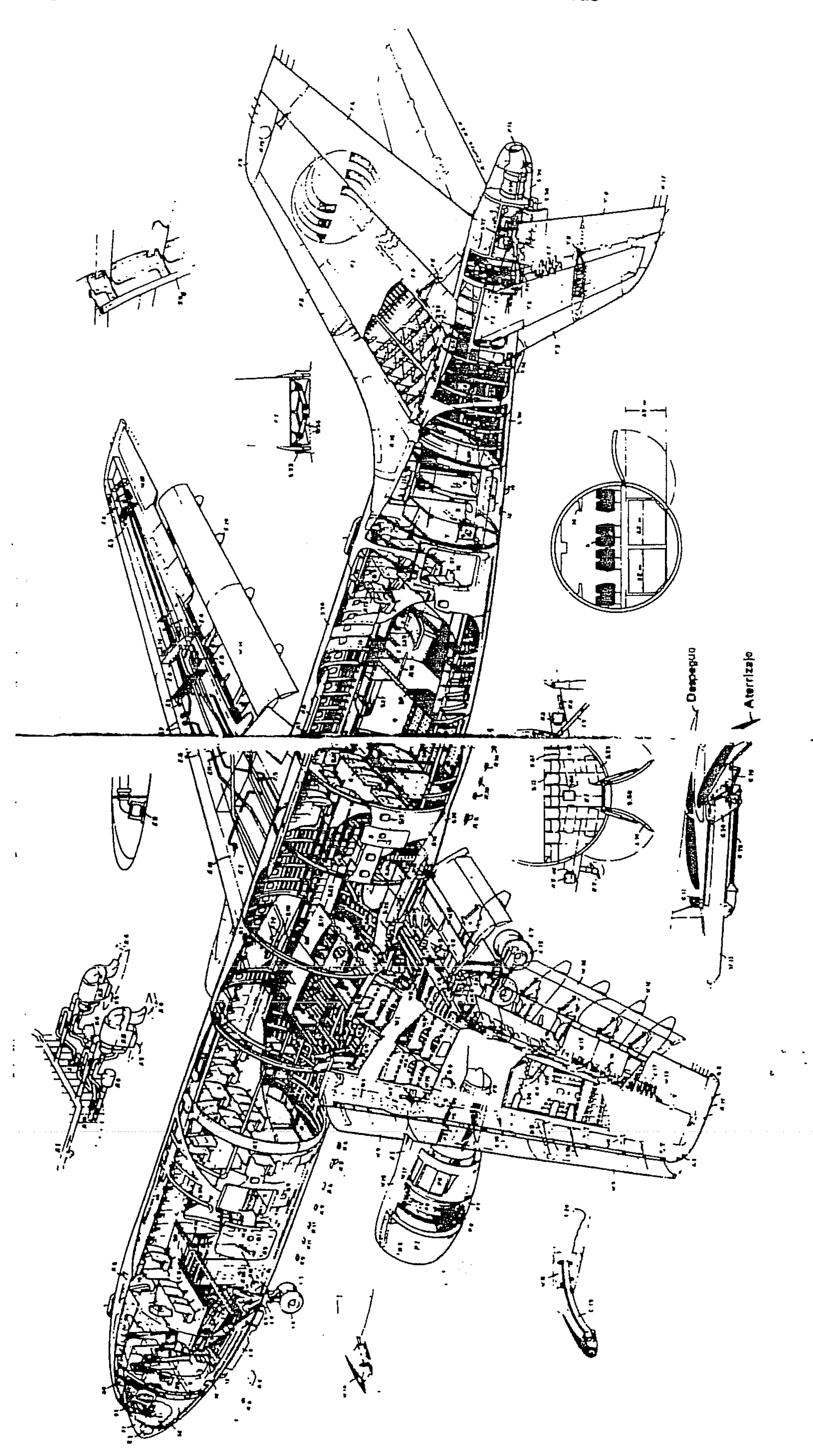


Figura 1.9: *Airbus A300B*

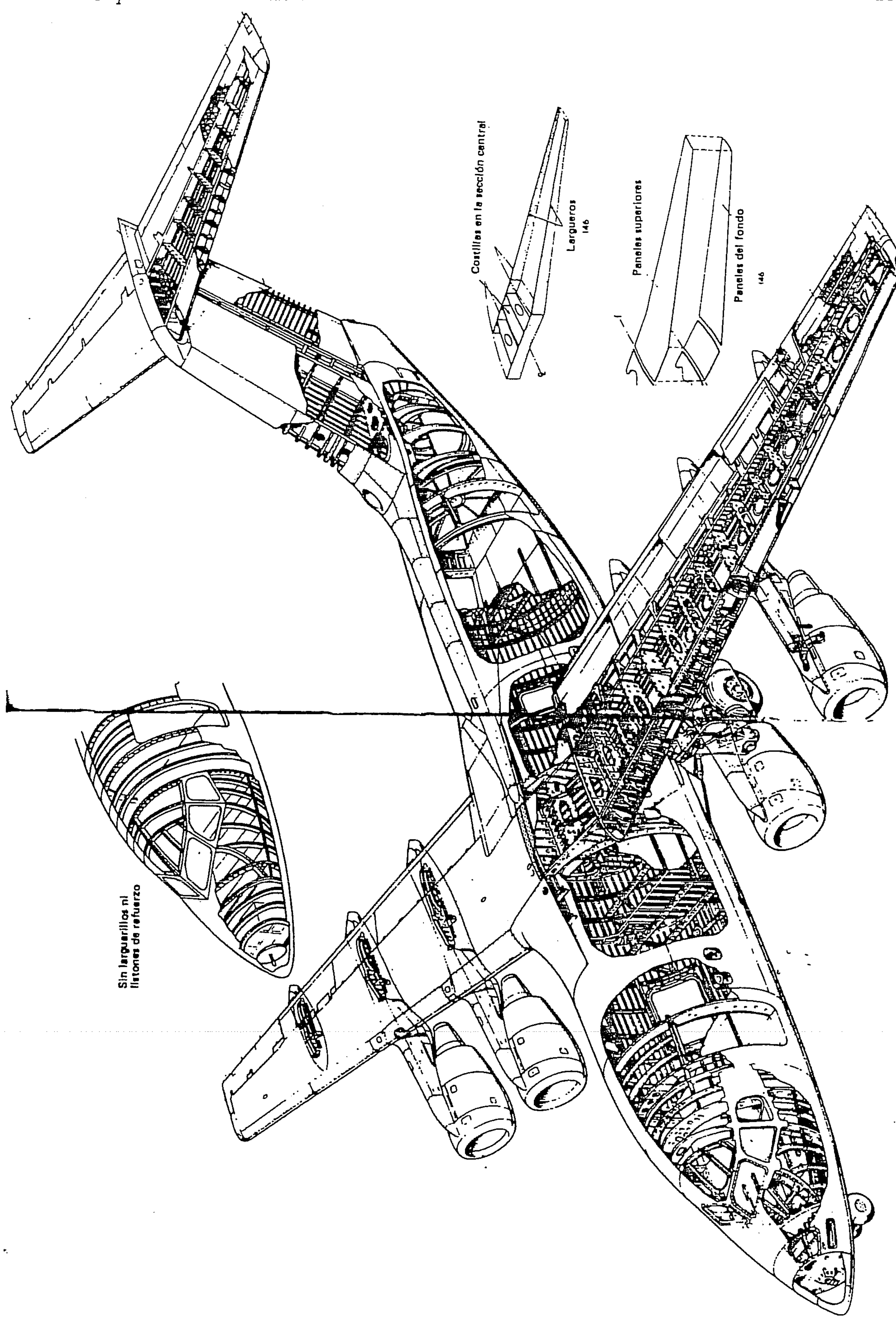


Figura 1.10: *British Aerospace 146*

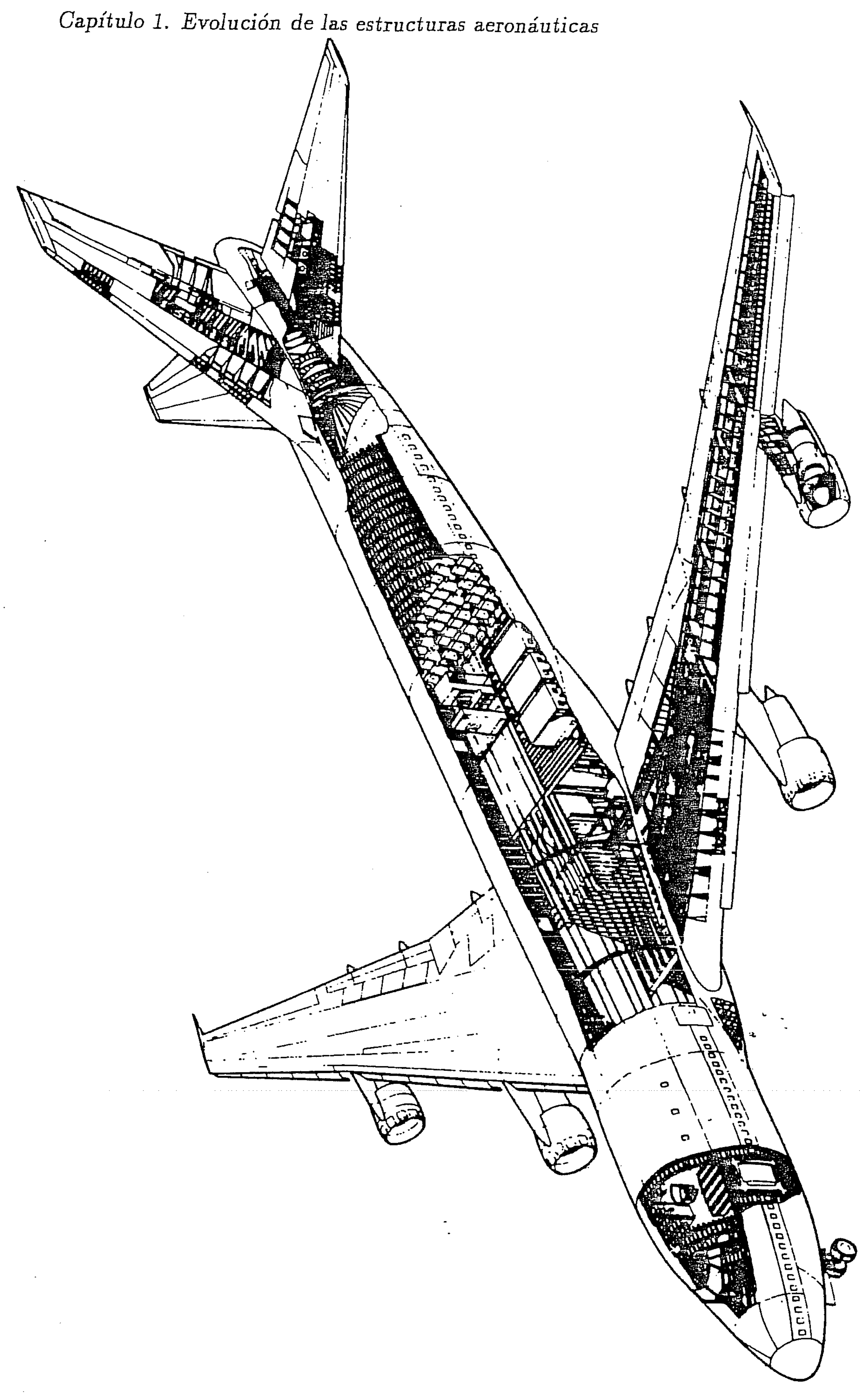


Figura 1.11: *Boeing 747*

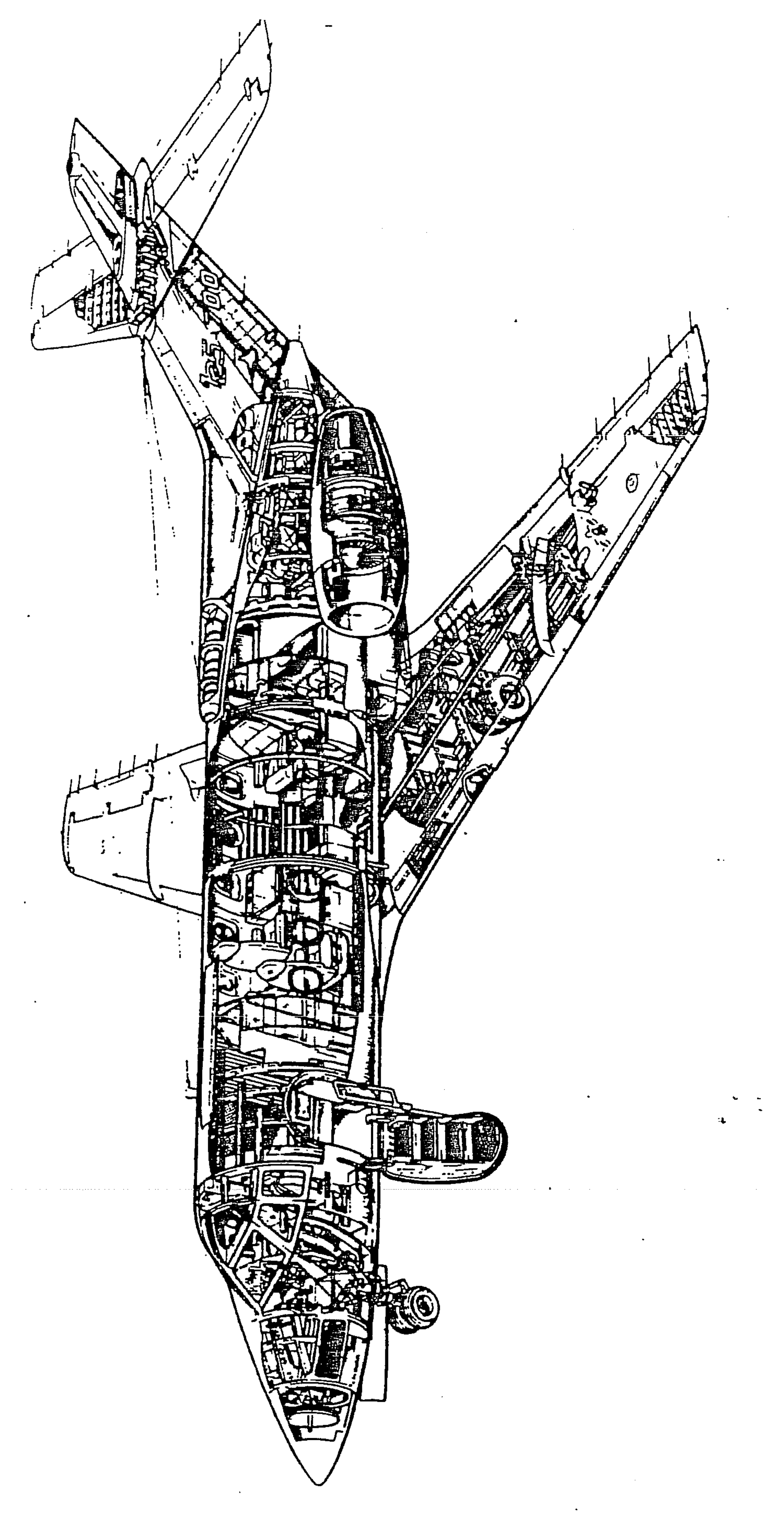


Figura 1.12: *HS-125*

Las figuras 1.7 a 1.12, muestran la dirección principal del desarrollo estructural a partir del *DC.3*. A lo largo de los años, se han inventado cierto número de métodos estructurales diferentes, pero la disposición de elementos transversales (llamados *costillas* en las alas y *cuadernas* o *mamparos* en el fuselaje) y de elementos longitudinales (llamados *larguerillos*) ha sido la aceptada durante muchos años.

Una ojeada a estos diseños posteriores a 1955 muestra claramente que las estructuras de los aviones grandes no son copias a gran escala de las de los aviones pequeños (o viceversa). De hecho, sea cual fuere el tamaño del avión, las cuadernas del fuselaje están siempre separadas unas 20 pulgadas (unos 500 mm) y tienen unas secciones rectas de una profundidad entre 70 y 150 mm. Esto significa que los aviones grandes tienen muchos elementos estructurales, y los pequeños, pocos.

Los desarrollos que han tenido lugar en años recientes se han dirigido principalmente a:

- reducir el número de remaches, ya sea mecanizando piezas grandes de estructura a partir de tochos o ensamblando los componentes por medio de adhesivos.
- reducir los efectos de pequeños daños estructurales, ya sea proporcionando suficientes elementos a fín de que el fallo de uno no sea desastroso (*estructuras seguras contra el fallo*) o mejorando el acceso para una más fácil inspección de las estructuras en servicio.
- utilizar nuevos materiales, ya sean aleaciones metálicas, materiales compuestos o paneles sandwich.

Los métodos de proyecto y fabricación de este tipo de construcción de revestimiento resistente son tan bien conocidos en la actualidad por los ingenieros y fabricantes, que el diseño de la estructura de un avión de tipo medio no plantearía problemas si no fuera por las presiones de tipo comercial que les obligan continuamente a reducciones de peso.

Otra medida de interés y otro área de innovación para el ingeniero de estructuras es la búsqueda de métodos para mejorar la fiabilidad de las mismas, ésto es, reduciendo el tiempo empleado en el suelo cuando se están buscando y reparando daños estructurales. El *British Aerospace 146* (figura 1.10) es muy interesante a este respecto, habiendose preocupado los proyectistas en reducir el número de elementos y el número de sitios en los que se pueda originar un daño estructural.

1.3 Estructuras sandwich

Uno de los principales problemas y limitaciones del material del revestimiento es su falta de rigidez. Una forma de proporcionar rigidez a láminas delgadas es hacer un *sandwich* con una hoja muy fina, una capa de un material central muy ligero pero bastante rígido, y otra hoja fina, todo ello pegado con un adhesivo adecuado. Los esfuerzos serían soportados por las capas exteriores, las cuales serían estabilizadas por el núcleo.

Como ocurrió con las estructuras semi-monocasco convencionales, la construcción de madera marcó también el camino de las estructuras sandwich: el famoso y elegante *De Havilland Mosquito* de 1940 fue construído con un revestimiento de madera

contrachapada a cada lado de un núcleo de madera de balsa. En las estructuras importantes de la actualidad, la solución más común consiste en utilizar un núcleo de fibra de vidrio o papel de poliamida, impregnados en diferentes tipos de resinas, con forma parecida a las celdillas de un panal o corrugado, emparedado entre dos placas delgadas de metal o material compuesto (ver figura 1.13).

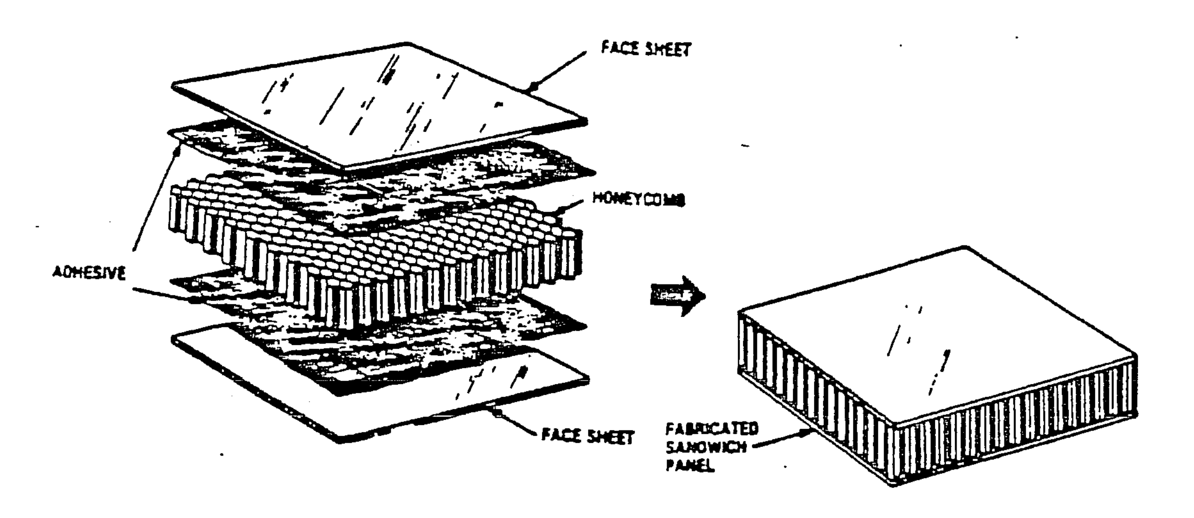


Figura 1.13: Estructura sandwich típica

Los paneles sandwich son capaces de desarrollar grandes esfuerzos, presentan un acabado superficial excelente y necesitan pocos elementos rigidizadores. Por el contrario, este tipo de construcción presenta el inconveniente de que los elementos curvos son difíciles de fabricar, y, en consecuencia, son caros. A pesar de este inconveniente, su uso se está extendiendo cada vez más. Así, por ejemplo, en el *Boeing 747* el porcentaje de elementos construídos con paneles sandwich es apreciable (ver figura 1.14).

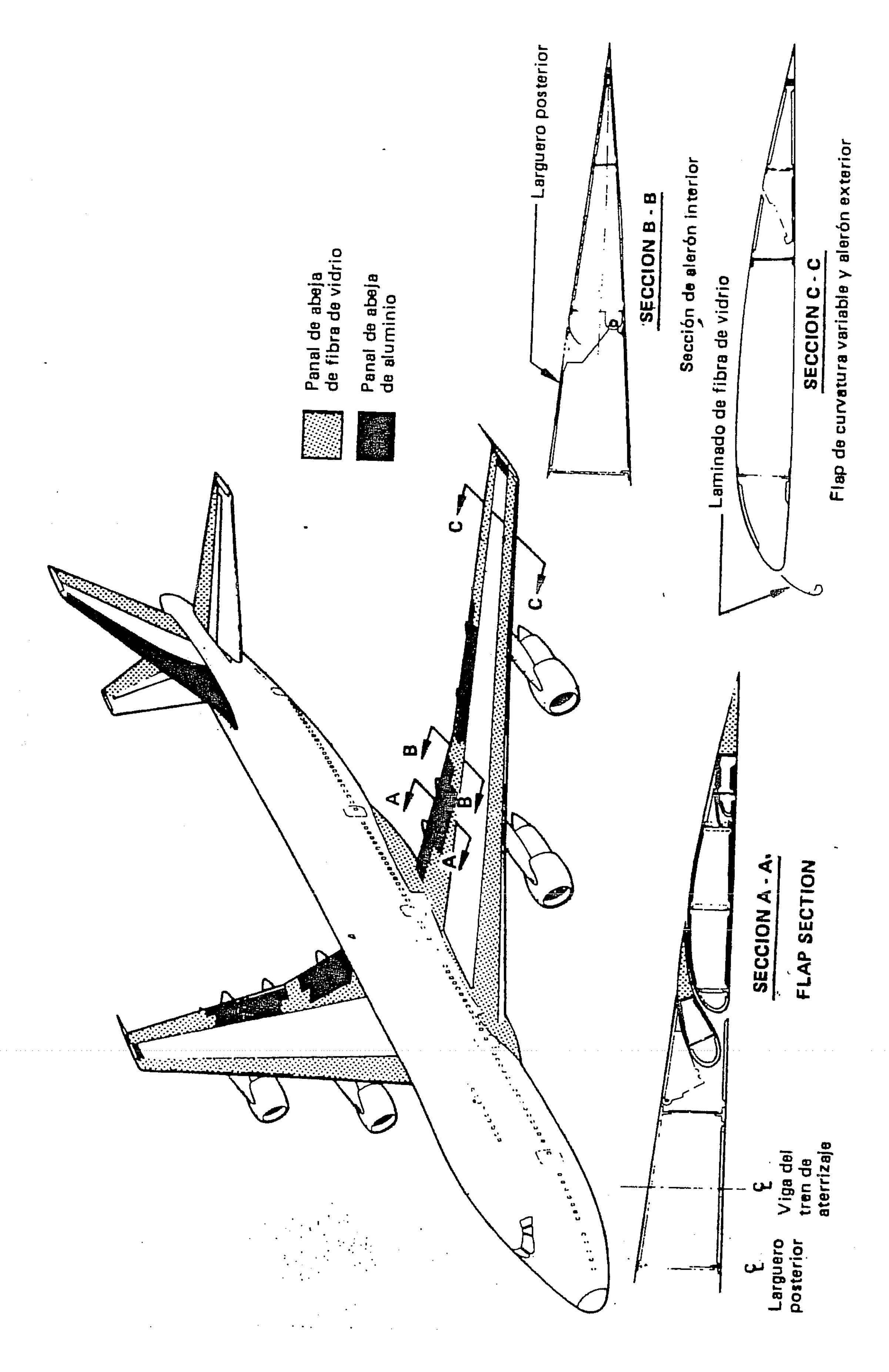


Figura 1.14: Empleo de las estructuras sandwich en el *Boeing 747*

Capítulo 2

Materiales de construcción aeronáutica

Existen diferentes factores que influyen a la hora de seleccionar un material para ser utilizado en la construcción de los diferentes componentes de un avión. Entre todos ellos, quizás el más importante sea que el material tenga una elevada relación entre sus propiedades resistentes y su peso. Otros factores que también influyen en mayor o menor medida, dependiendo del elemento para el que vaya a ser usado el material, son: su rigidez; tenacidad; resistencia a la corrosión, a la fatiga y a las condiciones ambientales; la facilidad con que se pueda moldear, mecanizar, soldar, etc.; las condiciones de suministro; y, no menos importante, su coste.

Los principales materiales utilizados en la construcción aeronáutica a lo largo de los tiempos son: la madera, el acero, las aleaciones de aluminio, y, más recientemente, las aleaciones de titanio y los materiales compuestos.

2.1 Historia

La primera generación de aviones fue construída de madera, con revestimiento entelado y tirantes de cables de acero. Las maderas más utilizadas fueron el abeto y el abedul, que tienen unos módulos de Young de 9000 y 14250 N/mm^2, unos esfuerzos de rotura a tracción de 70 y 100 N/mm^2, y unos pesos específicos de 0.4 y 0.63, respectivamente. Aunque estas maderas tienen unas relaciones resistencia/peso mejores que las de muchas de las modernas aleaciones de aluminio, sin embargo presentan algunos inconvenientes importantes. Entre ellos se pueden citar:

- Los cambios que experimentan sus formas y dimensiones debido a la absorción o pérdida de humedad como consecuencia de los cambios de las condiciones ambientales. Este problema es especialmente acuciante en climas tropicales.
- La falta de uniformidad que presentan sus propiedades estructurales, característica de los productos naturales.
- Su acusada anisotropía, causada por su estructura de grano, y que da lugar a unas diferencias del orden de 150:1 en módulos de Young y de 40:1 en coeficientes de Poisson entre la dirección de grano y la perpendicular a ella.

- Los aviones de madera necesitan mayor mantenimiento que los metálicos.
- Las termitas les producen grandes daños.

La introducción del contrachapado, así como el desarrollo de adhesivos sintéticos, mejoró las propiedades resistentes y eliminó, o al menos permitió controlar, los problemas de anisotropía de las maderas naturales. Esto permitió que se siguiera utilizando la madera como material estructural básico en la construcción aeronáutica durante un mayor periodo de tiempo, de modo que, por ejemplo, el *De Havilland Mosquito*, avión que tantos éxitos obtuvo en la II Guerra Mundial, fue construído todavía de madera.

Sin embargo, el desarrollo de aviones cada vez más grandes y de formas más complejas dio lugar a un aumento de cargas y de concentraciones de esfuerzos, para los cuales la madera no está bien adaptada. Esto, unido a los problemas anteriormente citados, dio lugar a que se abandonara la madera como material estructural básico y fuera sustituída por el metal.

Una vez abandonada la madera, el paso obvio fue utilizar el material universal de las construcciones de ingeniería: el acero. Los primeros aviones metálicos utilizaron elementos de acero en donde anteriormente se había empleado madera, pero conservaron el revestimiento de tela. El primer avión totalmente metálico fue el *Tuboavión*, diseño francés de 1912, pero normalmente se considera como primer avión totalmente metálico el *J1*, fabricado por el profesor Junkers en Alemania en 1915.

El acero presentaba la ventaja de sus altas propiedades resistentes, pero tenía el inconveniente de su elevado peso específico, casi 3 veces el de las aleaciones de aluminio, y del orden de 10 veces el del contrachapado.

En 1909, Alfred Wilm, en Alemania, descubrió accidentalmente que si una aleación de aluminio que contenía el 3.5% de cobre, 0.5% de magnesio y silicio y hierro como impurezas, se calentaba a unos 480°C y después se enfriaba rápidamente en agua, se hacía blanda y fácil de doblar o darle forma, pero al cabo de unas horas las piezas formadas volvían a tener su resistencia y dureza anteriores, sin necesidad de ningún tratamiento posterior. Los derechos de patente de esta aleación fueron adquiridos por *Durener Metallwerke*, que la comercializó con el nombre de *duraluminio*. Posteriormente se observó que un tratamiento de calentamiento posterior a unos 175°C, denominado *maduración artificial*, proporcionaba un aumento adicional en la resistencia.

Además del desarrollo del duraluminio, otras tres causas más contribuyeron a la sustitución del acero por las aleaciones de aluminio como material estructural básico en la construcción aeronáutica. Estas fueron:

- El mejor conocimiento de los procesos de los tratamientos térmicos.
- La introducción de extrusiones en un amplio rango de perfiles.
- El empleo del plaqueado de aluminio puro para dar una mayor resistencia a la corrosión.

De los tres materiales brevemente descritos anteriormente, madera, acero y aleaciones de aluminio, el último es el material más comúnmente utilizado en las estructuras aeronáuticas en nuestros días. Los aceros son usados cuando se necesitan

altas características de resistencia y rigidez. Aparte de éstos, otros materiales, tales como las aleaciones de titanio y los materiales compuestos, están siendo utilizados cada vez más en la industria aeronáutica.

A continuación se describen con más detalle cada uno de los materiales citados anteriormente.

2.2 Aleaciones de aluminio

Como ya se ha indicado anteriormente, los materiales estructurales utilizados más comunmente en la industria aeronáutica en la actualidad son las aleaciones de aluminio, también conocidas como *aleaciones ligeras.* Una aleación típica podría estar formada por un 4% de cobre, 0.5% de silicio, 0.5% de magnesio, un poco de manganeso, hierro y cromo, y el resto, más del 90%, aluminio. Mezclando el aluminio con estas cantidades muy pequeñas de otros metales se puede conseguir un efecto enorme sobre la resistencia: la resistencia de las aleaciones estructurales de aluminio es 6 a 8 veces mayor que la del metal puro. Cuando se descubrió por primera vez, el aluminio fue muy difícil de purificar. Hacia mediados del siglo XIX era considerado virtualmente como un metal semiprecioso, e incluso, cuando se mejoraron los métodos de producción y se abarató, fue poco usado como material estructural debido a su debilidad. No fue hasta aproximadamente el final de la I Guerra Mundial cuando el descubrimiento de métodos de producción de aleaciones posibilitó el diseño del tipo de estructuras, que han cambiado muy poco desde entonces hasta la actualidad.

Las aleaciones de aluminio comienzan su vida como lingotes de fundición. Existen muchos usos para el aluminio fundido (motores alternativos, cárteres, pistones, etc.), pero en general no es un buen material estructural, debido principalmente a que es un material poco dúctil, o lo que es lo mismo, bastante quebradizo. Este hecho es reconocido por las autoridades aeronáuticas, que exigen considerables pruebas de resistencia a cualquier elemento estructural en el que se utilice fundición. Normalmente, los lingotes de fundición son manipulados y sometidos a varios procesos que cambian sus características transformándolos en lo que se llaman *aleaciones de forja.* Estas se usan de varias formas:

- Chapas y placas
- Piezas forjadas
- Extrusiones
- Tubos

En el proceso de transformación de fundición a forja, el material de fundición, que probablemente es un cilindro de unas 10 pulgadas de diámetro y 25 de largo, es sometido en primer lugar a un proceso de compresión repetido, algo parecido al amasado del pan. El objeto de éste es cambiar la estructura granular irregular de la fundición en un material con un grano o textura interna continua.

Para fabricar *chapas* o *placas*, el bloque comprimido o lingote se pasa a través de una serie de pesados rodillos que reducen el espesor del material a unas dimensiones útiles, cuidadosamente controladas.

Para el *forjado*, el lingote se corta en piezas más pequeñas que posteriormente son, casi literalmente, martilladas y prensadas entre troqueles preparados cuidadosamente, hasta darles la forma adecuada. Los componentes forjados son a veces difíciles de distinguir externamente de los fundidos, pero el proceso de fabricación de forja da lugar a una calidad de material mucho mejor que el de fundición.

El proceso de fabricación por *extrusión* se compara a menudo con la salida de pasta de dientes de un tubo con la boquilla adecuada para producir largas tiras de material de sección compleja. Puede ser difícil pensar que ésto mismo ocurra con el material metálico, pero dada la robustez de las máquinas, éste es realmente el proceso.

Los *tubos* comienzan como extrusiones huecas que son dirigidas a través de troqueles circulares. Este proceso dirigido aumenta de nuevo la calidad del material, además de disminuir su espesor.

Las principales ventajas que presentan las aleaciones de aluminio son las siguientes:

- Es un material ligero, obteniéndose mayores reducciones de peso especialmente cuando se utiliza en piezas sometidas a flexión o compresión, que son la mayoría de los elementos estructurales de cualquier avión.
- Se le dan las formas adecuadas con facilidad.
- Es un material comparativamente fácil de trabajar.

Sin embargo, los materiales que tienen ventajas también presentan inconvenientes, y las aleaciones de aluminio no son una excepción. Entre las desventajas más importantes que afectan en general a todas las aleaciones de aluminio se pueden citar las siguientes:

- Uno de los mayores problemas es el proceso conocido como *envejecimiento*. Como se ha visto anteriormente, parte del proceso para aumentar la resistencia del duraluminio consiste en darle un envejecimiento o maduración artificial. Desgraciadamente, este proceso continúa a lo largo de la vida del material; los elementos fabricados con un material, seleccionado cuidadosamente por ciertas propiedades, estarán compuestos realmente al cabo de unos ciertos años por un material diferente. En el pasado, este fenómeno produjo situaciones en las que los principales componentes de las alas tuvieron que ser renovados después de unos 15 años de vida del avión, aproximadamente.
- Otro inconveniente es el fenómeno conocido como *fatiga*. Esta aparece en elementos metálicos que están sometidos a esfuerzos variables, sobre todo si éstos varían de tracción a compresión de una forma cíclica. Se necesitarían muchos ciclos para producir el fallo. Sin embargo las estructuras aeronáuticas están sometidas a variaciones constantes de esfuerzos debidas a diferentes fenómenos: presurizaciones y despresurizaciones de cabina, flexiones producidos por ráfagas sobre las alas, vibraciones en la zona de los motores o en las palas de los helicópteros, etc. Esto hace que la fatiga se transforme en uno de los principales problemas para el ingeniero de estructuras. Básicamente, el

problema se resuelve reduciendo el esfuerzo máximo de un elemento a uno considerablemente menor que el permitido por la especificación del material. Este límite de resistencia por fatiga se encuentra en unos 150 N/mm^2 en casi todas las aleaciones ligeras. Los proyectistas que utilicen aleaciones de fundición a elevados niveles de esfuerzos deben considerar cuidadosamente el número de ciclos a los que se espera que vaya a estar sometido el elemento. Posiblemente se haya dado la falsa impresión de que las aleaciones de aluminio son más susceptibles de fatiga que otros metales. Esto no es necesariamente cierto, pero el diseño de aviones está siempre muy próximo a los límites de la tecnología, investigación y prestaciones, de forma que estas aleaciones están siempre en un primer plano cuando se habla de fatiga.

- Una tercera desventaja de las aleaciones de aluminio es su susceptibilidad a los efectos de muescas o pequeños cortes.

- En la actualidad, existe otra limitación para el uso de aleaciones ligeras de aluminio en aviones supersónicos: debido a la alta velocidad alcanzada por estos aviones se producen elevadas temperaturas en el revestimiento, disminuyendo las propiedades resistentes del material. Así por ejemplo, el *Concorde* se proyectó para Mach 2.2 debido a que a velocidades más altas se habrían necesitado utilizar materiales diferentes de las aleaciones de aluminio. Aún así, se desarrolló una aleación especial particular para este avión con objeto de obtener una mejora en las características de resistencia y fatiga en una amplia gama de temperaturas.

Durante los últimos 30 años, aproximadamente, tres grupos de aleaciones de aluminio han dominado el campo de la construcción aeronáutica. Estos tres grupos son:

- El primer grupo es el conocido con el nombre genérico de *duraluminio.* Como se ha indicado anteriormente, apareció a principios de siglo. Su composición típica es del 4% de cobre, 0.5% de magnesio, 0.5% de manganeso, 0.3% de silicio, 0.2% de hierro, y el resto de aluminio. Este grupo incluye tanto el duraluminio madurado naturalmente como el madurado artificialmente.

- El segundo grupo aparece hacia los años 30 y se diferencia del duraluminio principalmente por la adición de un 1–2% de níquel, un alto contenido de magnesio y posibles variaciones en las cantidades de cobre, silicio y hierro. La aleación *"Y"* es el miembro más antiguo del grupo y tiene una composición del 4% de cobre, 2% de níquel, 1.5% de magnesio y el resto de aluminio. Su propiedad más importante es que mantiene sus propiedades de resistencia a altas temperaturas, lo que la hace especialmente aplicable a motores de aviación. Su uso para estructuras aeronáuticas es muy limitado. Posteriormente, gracias a las investigaciones realizadas por *Rolls Royce* y el desarrollo hecho por *High Duty Alloys Ltd.*, surge la serie de aleaciones *"RR"*. Estas están basadas en la aleación *"Y"* y fueron obtenidas reemplazando parte del níquel por hierro y reduciendo el porcentaje de cobre. Estas aleaciones fueron utilizadas principalmente para forjados y extrusiones en motores de aviación y componentes estructurales.

- El tercer grupo, que comenzó a utilizarse a mediados de los años 40, utilizaba zinc y magnesio como elementos aleados, lo que le daba unas elevadas propiedades mecánicas. Estas aleaciones tienen una composición nominal del 2.5% de cobre, 5% de zinc, 3% de magnesio, hasta el 1% de níquel y el resto aluminio. Sus propiedades mecánicas típicas son: 585 N/mm^2 de esfuerzo de rotura en tracción, 510 N/mm^2 de esfuerzo que produce una deformación permanente del 0.1%, y 8% de elongación en la rotura. En versiones actuales de estas aleaciones, ha sido eliminado el níquel y se ha añadido cromo y mayores cantidades de manganeso.

Las aleaciones de cada uno de estos tres grupos han sido utilizadas ampliamente en estructuras aeronáuticas, habiéndose elegido una u otra en función de los requerimientos exigidos para la pieza que se iba a fabricar. De hecho, incluso cada tipo de avión tiene unos requerimientos diferentes. Así, por ejemplo, un avión militar, que tiene una vida relativamente corta, no exige el mismo grado de resistencia a la fatiga y a la corrosión que un avión civil, con una vida mucho mayor.

Desgraciadamente, la mejora de una propiedad en una determinada aleación de aluminio suele ir acompañada del empeoramiento de otras. Así, por ejemplo, la extremadamente alta resistencia estática de las aleaciones de Al-Zn-Mg fue acompañada durante muchos años por el fenómeno denominado *corrosión por estado latente de esfuerzos*, consistente en la aparición de grietas debido a la existencia de esfuerzos internos en la pieza originados por el tratamiento térmico. La experiencia en servicio del *Viscount* dio lugar a un gran número de fallos por corrosión bajo tensiones en forjados y extrusiones. El problema llegó a ser tan serio que en 1953 se decidió reemplazar todos los componentes fabricados en esta aleación que fuera posible y prohibir el uso en futuros diseños de forjados de aleaciones que contuvieran zinc. Sin embargo, las investigaciones realizadas en Gran Bretaña, E.E.U.U. y Alemania en los últimos años han permitido obtener mejoras en la resistencia a corrosión bajo tensiones de las aleaciones de Al-Zn-Mg. Tanto los británicos como los americanos llegaron a la conclusión de que se obtienen mejoras apreciables añadiendo aproximadamente un 1% de cobre, aunque no están de acuerdo en cuanto a la inclusión de cromo y manganeso. En Alemania se ha comprobado que la adición de plata ha dado lugar a resultados muy beneficiosos. Por otra parte, también se han obtenido mejoras en la resistencia a la corrosión bajo tensiones gracias a un mejor control de las técnicas de fundición.

El desarrollo de las aleaciones de Al-Zn-Mg-Cu, denominadas *Series 7000*, ha permitido obtener tanto unas elevadas propiedades mecánicas como una buena resistencia al crecimiento de grietas por fatiga y una tenacidad adecuada. Las investigaciones posteriores se han centrado, más que en aumentar la resistencia o rigidez, en desarrollar materiales que tengan unas mejores propiedades específicas que permitan obtener un ahorro de peso.

Las aleaciones de duraluminio poseen unas propiedades estáticas menores que las anteriores, pero es recomendable su utilización en aquellas partes de la estructura en donde los requerimientos de fatiga son de importancia primaria, como por ejemplo en los revestimientos inferiores de alas, en donde predominan las cargas de tracción. La experiencia ha mostrado que las aleaciones maduradas naturalmente son mejores que las maduradas artificialmente con respecto a fatiga y resistencia a la

propagación de grietas. Por otra parte, en los E.E.U.U. se comprobó que la inclusión de un mayor porcentaje de magnesio en las aleaciones maduradas naturalmente da lugar a unas propiedades mecánicas que son intermedias entre las correspondientes a las aleaciones normales maduradas naturalmente y las maduradas artificialmente. Esta aleación, denominada 2024 (las aleaciones Al-Cu forman la *Serie 2000*) tiene la composición nominal siguiente: 4.5% de cobre, 1.5% de magnesio, 0.6% de manganeso y el resto de aluminio, y con ella se obtiene un compromiso satisfactorio entre las diferentes, y muchas veces conflictivas, propiedades mecánicas.

En ocasiones, se desarrolla una forma particular de una aleación para un avión determinado. Ya se ha citado anteriormente el caso del *Concorde*, para el que se desarrolló un nuevo material, el *C.M.001.* Este material está basado en el *Hiduminium RR58*, que es una compleja aleación de Al-Cu-Mg-Ni-Fe desarrollada durante la II Guerra Mundial para la fabricación de componentes forjados de turbinas de gas. La composición del *C.M.001* fue seleccionada a fín de obtener unas buenas características de resistencia y fatiga a elevadas temperaturas.

Las investigaciones actuales incluyen el desarrollo de una aleación de aluminio-litio, en la cual la adición de litio, cuya densidad es muy baja (0.5 kg/dm^3), ha permitido obtener para la aleación una densidad menor que la del aluminio (2.7 kg/dm^3). Esta aleación fue usada con éxito hace algunos años en el *North America Vigilante*, aunque evidenció una pobre tenacidad a la fractura y una baja resistencia al crecimiento de grietas por fatiga; no obstante, su resistencia a la corrosión fue buena. Actualmente se está llevando a cabo en el *RAE* un programa de investigación sobre aleaciones de Al-Li, el cual está concentrado en tres variaciones:

- Una aleación de resistencia media para reemplazar al 2014-T651 (chapas y placas), utilizado ampliamente en los aviones del Reino Unido.

- Una aleación de alta resistencia para reemplazar a las de la Serie 7000, utilizadas generalmente en estructuras cargadas a compresión, tales como los revestimientos superiores de alas.

- Una aleación resistente a fatiga para reemplazar al 2024-T351, utilizado en aquellos componentes en los que la resistencia a fatiga y la tenacidad a fractura son más importantes que la resistencia estática, como pueden ser los revestimientos inferiores de alas.

Una ventaja adicional de las aleaciones de Al-Li es que pueden ser mecanizadas utilizando los mismos equipos que para las Series 2000 y 7000, de modo que su utilización no requeriría una mayor inversión de capital.

También se están realizando investigaciones en aleaciones de Al-Cr-Fe, que tienen un elevado módulo de Young, alrededor de 88000 N/mm^2, y muestran una considerable estabilidad térmica y resistencia a la corrosión.

2.3 Aceros

El acero es hierro aleado con otros elementos. Los elementos de aleación se presentan en una amplia variedad de combinaciones y cantidades diferentes para conseguir una serie de materiales adecuados para muy diferentes usos.

Como se ha visto anteriormente, los primeros aviones metálicos se construyeron de acero. Sin embargo, la cantidad de acero utilizada en las estructuras de avión se ha ido reduciendo constantemente hasta el punto de que el diseñador la utiliza sólo a disgusto cuando no encuentra otro material adecuado a su propósito. Esto, particularmente, se debe a las mejoras en las propiedades de las aleaciones de aluminio y al uso del titanio, pero más aún es debido al intento de evitar las estructuras construídas mezclando varios materiales. Con el tamaño actual de los aviones no es posible pensar en un avión con el revestimiento exterior totalmente de acero; por tanto, si el revestimiento es de aleación de aluminio, ésto impondrá el material de que esté fabricada toda la estructura. Hay dos razones para evitar la mezcla de materiales: una es un problema de corrosión galvánica; la otra es que el acero es más rígido que el aluminio y, por ello, intentará soportar toda la carga, dejando el aluminio descargado y, por tanto, ineficaz. A pesar de estos inconvenientes, el acero sigue siendo aún un importante material aeronáutico, usándose en trenes de aterrizaje, soportes de motor, placas de unión (en la raíz de las alas, etc.), pernos, pasadores, herrajes, y en muchos otros lugares en donde sus valiosas propiedades, bien documentadas, su fiabilidad y su comparativamente bajo precio son preponderantes sobre sus desventajas de alto peso, tendencia a la corrosión y elevados costes de fabricación.

El "alto peso" mencionado anteriormente requiere alguna explicación. En general, el acero es tres veces más pesado que el aluminio, pero también es tres veces más resistente, de modo que si el material trabajara al máximo de su resistencia, no habría una penalización en peso intrínseca en el uso de acero en lugar de aleación de aluminio. Sin embargo, esta solución ideal es virtualmente imposible de alcanzar, dado que, por razones de estabilidad, de fabricación, etc., es necesario tener un volumen mínimo de material. Por ejemplo, la chapa de revestimiento utilizada en el fuselaje o en las alas ha de tener un espesor mínimo del orden de 1 mm; para este espesor se puede conseguir la resistencia necesaria con aleaciones de aluminio. Si se utilizara acero se podría mantener la resistencia con un espesor tres veces menor sin aumento de peso, pero está claro que un espesor de 0.3 mm no es una solución práctica.

El elemento principal que se alea al hierro para fabricar el acero es el carbono. Esta adición de carbono al hierro puro es virtualmente una definición de acero, aunque en años recientes se han desarrollado aceros de gran resistencia que sólo tienen mínimas cantidades de carbono (ver *aceros maraging* más adelante). En general, a mayor contenido de carbono, mayor resistencia del acero. Sin embargo puede llevar a confusión si se comparan los contenidos en carbono del relativamente débil hierro colado (entre el 2.5% y el 3.5% de carbono) con los de un acero (alrededor de un 0.2% para un acero dulce de baja resistencia y de un 0.5% para un acero de alta resistencia). Lo que pasa es que en ambos materiales el carbono está contenido de forma diferente: en la fundición está como grafito suspendido en el hierro puro (semejante a la partículas de fango en el agua), mientras que en el acero está realmente disuelto en el hierro. Los otros elementos principales de aleación son:

- Manganeso (1.2 – 2%)
- Cromo (en más de un 25% en algunos aceros inoxidables resistentes al calor o aceros resistentes a la corrosión)

- Níquel (hasta un 20%)
- Molibdeno (0.1 – 0.8%)
- Silicio
- Vanadio
- Azufre
- Fósforo

Existe una amplia gama de especificaciones de aceros, cada uno de los cuales tiene sus propiedades que lo hacen adecuado para determinadas tareas. De forma general se pueden agrupar en:

- Aceros al carbono
  - con bajo contenido de carbono
  - con alto contenido de carbono
- Aceros aleados
- Aceros inoxidables o resistentes a la corrosión
- Aceros para trabajos en caliente y superaleaciones

Los *aceros inoxidables* y *para trabajos en caliente* se definen por sí mismos y no son de mucho interés actualmente para las estructuras de aviones. Aunque hace algunos años la *Bristol Aeroplane Company* fabricó un avión de investigación de caza supersónico totalmente de acero inoxidable, llamado *Tipo 188*, actualmente un proyecto similar probablemente usaría titanio. Los aceros inoxidables pueden especificarse para algunos proyectos nuevos donde su coste relativamente bajo respecto del titanio puede hacerlos atractivos.

Los *aceros de bajo contenido de carbono* pertenecen al grupo que se utiliza para la fabricación de puentes y casi todos los elementos de ingeniería de la construcción del mundo, pero no se emplean en la ingeniería aeronáutica. Aunque su módulo de Young es mucho más alto que el de las aleaciones ligeras (210000 frente a 70000 N/mm^2), su esfuerzo de rotura en tracción es inferior (unos 325 frente a 385 N/mm^2).

Los restantes *aceros al carbono* y *aleados* se usan en las estructuras de avión, principalmente en herrajes y pasadores. Los nombres normales del grupo suelen ser muy vagos, por lo que es conveniente agrupar las especificaciones en las que son soldables o no, las que son fáciles o difíciles de mecanizar, etc., y ordenarlas de acuerdo con su resistencia. Sin embargo, en un intento de dar una definición, se puede decir que los *aceros aleados* son aquellos en los que el total de los constituyentes de la aleación es superior al 5%, y los *aceros de alto contenido de carbono* son aquellos en los que el porcentaje de este elemento es superior al 0.2% y tienen como único otro componente el manganeso. El margen de variación de la resistencia en los aceros es

muy amplio. Incluso cuando lo que se precisa es una propiedad tan particular como la capacidad de soldadura, existe una gama muy extensa en donde elegir.

En los aceros aleados se pueden obtener propiedades mecánicas altas aumentando su contenido en carbono. Sin embargo, a medida que aumenta el porcentaje de carbono que tiene un acero, éste se hace más difícilmente mecanizable y conformable en frío, así como más quebradizo y difícilmente soldable. Para evitar estos problemas, en 1961 fue desarrollada una nueva gama de aceros llamada *aceros maraging*, en los cuales el carbono ha sido virtualmente eliminado. Estos aceros se obtienen eliminando prácticamente el carbono y añadiendo al hierro otros elementos tales como níquel, cobalto y molibdeno. Un acero maraging típico tendría la siguiente composición química: 17 – 19 % de níquel, 8 – 9 % de cobalto, 3 – 3.5 % de molibdeno, 0.15 – 0.25 % de titanio, un contenido máximo de carbono del 0.03 % y pequeñísimas cantidades de manganeso, silicio, azufre, fósforo, aluminio, boro, calcio y zirconio. Su módulo de Young sería del orden de 180000 N/mm^2 y su esfuerzo correspondiente a una deformación permanente del 0.2% sería de unos 1400 N/mm^2, aproximadamente.

Las principales ventajas que presentan los aceros maraging son:

- Mayor tenacidad a la fractura y resistencia a la entalla
- Tratamiento térmico más sencillo
- Mucho menor cambio de volumen y forma durante el endurecimiento
- Más fáciles de soldar
- Más fáciles de mecanizar
- Mayor resistencia a la corrosión bajo tensión
- Mayor resistencia a la fragilidad por hidrógeno

Por otra parte, su coste inicial es 3 o 4 veces mayor que el de un acero convencional, aunque ésto puede compensarse por los menores costes de mecanización; pero el coste total de un determinado acero maraging debería compararse con el de una aleación de titanio antes de decidir su utilización.

2.4 Aleaciones de titanio

Las aleaciones de titanio están siendo utilizadas cada vez más en la industria aeronáutica. Poseen unas elevadas propiedades específicas, tienen una buena relación entre las resistencias a fatiga y a tracción, y algunas aleaciones mantienen una resistencia considerable hasta temperaturas del orden de 400 a 500°C. Generalmente también presentan una buena resistencia a la corrosión, aunque sus propiedades se ven afectadas desfavorablemente cuando están sometidas a temperaturas y esfuerzos en un ambiente salino. Otras desventajas son su alta densidad (intermedia entre la de las aleaciones de aluminio y la del acero), así como su elevado coste inicial y de fabricación (unas 7 veces el de las aleaciones de aluminio y el del acero).

A pesar de las desventajas que presentan, las aleaciones de titanio se emplean cada vez más en piezas especiales de la estructura, tales como carenados próximos al flujo del motor y bordes de entrada, donde anteriormente se había utilizado acero inoxidable. En el *Boeing 727*, diseñado a principios de los años 60, menos del 2% del peso estructural era de titanio; sin embargo, ya a finales de los mismos años 60, la estructura del *Boeing 747* era, en peso, casi el 10% de titanio, y ésto a pesar de que sus proyectistas estaban en contra del uso del titanio debido a que el peso en el diseño final excedía del calculado en el proyecto. Esta tendencia ha sido superada por otros aviones civiles y más aún por los diseños militares. Además, los nuevos procesos de fabricación (como por ejemplo, el *conformado superplástico* y el *pegado por difusión*) han permitido producir grandes y complejos componentes , con el consiguiente ahorro de peso y de horas-hombre de producción en comparación con las estructuras convencionales de titanio; se suelen citar como cifras de ahorro típicas el 30% en horas-hombre, el 30% en peso y el 50% en coste. Se prevé que el número de componentes de titanio fabricados por estos procedimientos crecerá considerablemente en los nuevos aviones.

2.5 Materiales compuestos

Los materiales compuestos están formados por fibras muy fuertes de vidrio, carbono, etc., puestas en una matriz de plástico o resina epoxy que les sirve de protección química y mecánica. Estas fibras pueden ser continuas o discontinuas, y poseen unas propiedades mecánicas muy elevadas; por ejemplo, las fibras de carbono pueden tener módulos de Young de hasta 400000 N/mm^2 y esfuerzos de rotura a tracción de hasta 2800 N/mm^2.

Una lámina de material compuesto es anisotrópica, dado que sus propiedades en una dirección dada dependen del ángulo que forme con la dirección de la fibra. Debido a ésto, lo que se suele hacer es unir varias láminas para formar un laminado en el que las direcciones de las fibras de cada lámina han sido seleccionadas adecuadamente en función del tipo de cargas a que se vaya a encontrar sometido.

Los primeros materiales compuestos que se desarrollaron estaban formados por fibras de vidrio en una matriz de resina epoxy. Estos materiales, conocidos usualmente como *GRP* (*Glass Reinforced Plastic*), fueron usados en carenados del radar ("*radome*") y palas de helicóptero, pero su uso en componentes de aviones de pala fija estuvo muy limitado debido a su baja rigidez.

En los años 60 fueron introducidas nuevas fibras. El *Kevlar*, por ejemplo es un material con fibras de aramida que tienen una resistencia similar a las de vidrio, pero con mayor rigidez. Los compuestos de *Kevlar* son resistentes, pero se comportan mal a compresión y son difíciles de mecanizar, por lo que se han usado principalmente sólo en estructuras secundarias. El primer material compuesto con rigidez y resistencia suficientes para poder ser utilizado en estructuras primarias fue desarrollado en los E.E.U.U. y contenía fibras de boro.

En la actualidad, todos los materiales compuestos anteriores han sido reemplazados casi en su totalidad por los de fibras de carbono, conocidos como *CFRP* (*Carbon Fiber Reinforced Plastic*), que tienen propiedades similares a los de fibra de boro pero son mucho más baratos. Los *CFRP* tienen un módulo elástico del orden de 3 veces

el de los *GRP*, 1.5 veces el de los compuestos *Kevlar* y 2 veces el de las aleaciones de aluminio; su resistencia es del orden de la de los *GRP*, ligeramente menor que la de los *Kevlar* y unas 3 veces la de las aleaciones de aluminio. Sin embargo, los *CFRP* presentan también algunos inconvenientes, entre los que se pueden citar los siguientes:

- Es un material quebradizo; por consiguiente, no fluye plásticamente en las regiones de alta concentración de esfuerzos.
- Su resistencia disminuye cuando se producen daños por impacto, los cuales pueden no ser visibles.
- Las resinas epoxy pueden absorber humedad durante un largo periodo de tiempo, lo cual reduce las propiedades del material compuesto que dependen de la matriz, tales como su resistencia a compresión. Este efecto se agrava a elevadas temperaturas.

Como consecuencia de ésto, los *CFRP* presentan unas variaciones aleatorias en sus propiedades mayores que las que aparecen en los metales. Por otra parte, la rigidez de los *CFRP* se ve mucho menos afectada que su resistencia por los factores anteriormente citados, y son menos sensibles que los metales a daños por fatiga.

Se estima que si el 40% de la estructura se fabricase con *CFRP* en lugar de con aleaciones de aluminio, se produciría un ahorro en peso estructural del 12%. El empleo del *CFRP* en estructura primaria es cada vez mayor, aunque parece improbable que se construya un avión totalmente de material compuesto. Se estima que el porcentaje máximo de material compuesto a que se llegará en un avión es el 40%.

Las investigaciones actuales sobre los materiales compuestos están orientadas hacia la reducción de imperfecciones en las fibras de carbono, así como hacia el desarrollo de nuevas matrices, tales como la *polyetheretherketone*, la cual absorbe mucha menos humedad que la resina epoxy, tiene una vida propia indefinida y se comporta bien bajo impacto, aunque su fabricación requiere unas temperaturas mucho más elevadas. Otros compuestos con matrices metálicas, como el grafito-aluminio y el boro-aluminio son más ligeros y mantienen sus propiedades resistentes a temperaturas más elevadas que las aleaciones de aluminio, pero son caros de producir.

2.6 Vidrio

La mayoría de los aviones modernos tienen las cabinas presurizadas para poder volar a grandes altitudes. Por consiguiente, los parabrisas y las ventanas están sometidos a cargas normales a su plano, formando parte de la estructura. En la mayoría de los casos, su diseño consta de tres capas separadas: una capa intermedia que soporta los esfuerzos; otra capa exterior que los soportaría en caso de rotura de la anterior, y un escudo plástico interior para impedir que los viajeros produzcan arañazos en la capa intermedia. Las capas que soportan la carga son normalmente de vidrio endurecido por tratamiento térmico o de vidrio laminado de tres capas (*Pyrex* y *Triplex*, respectivamente). Los vidrios laminados utilizados en los aviones

tienen módulos de elasticidad comprendidos entre 70000 y 75000 N/mm^2 y módulos de rotura en flexión de 45 N/mm^2. Los endurecidos por tratamiento térmico tienen un módulo de rotura del orden de 4.5 veces el anterior.

2.7 Plásticos

Los materiales plásticos tienen un peso específico de aproximadamente la unidad, por lo que son bastante más pesados que la madera aunque su resistencia es semejante. Por otra parte, su peso específico es menos de la mitad del de las aleaciones de aluminio, por lo que suelen ser usados para componentes sometidos a niveles bajos de esfuerzos, cuyas dimensiones son determinadas por razones de manejabilidad más que de resistencia. Los plásticos son también utilizados para ventanas y como aislantes eléctricos.

2.8 Tratamientos térmicos

El tratamiento térmico cambia las características de un material, transformando su estructura interna en el sentido deseado. Por ejemplo, una aleación elástica dura puede ablandarse de forma que se pueda doblar y luego ser de nuevo endurecida hasta devolverle sus propiedades iniciales.

Téngase en cuenta que para un mismo material, las condiciones del tratamiento térmico a que se le somete pueden dar origen a cambios considerables en la resistencia.

- En los *aceros al carbono*, éste se mantiene en la aleación, bien sea en forma de perlita o cementita; es la diferencia entre estos dos estados lo que determina que el acero sea blando o duro. Cuando se calienta el acero al rojo, el carbono está formando cementita; si se permite un enfriamiento lento cambia a perlita y el material se hace blando (la palabra "blando" se utiliza aquí en términos comparativos porque, incluso en esta condición, los aceros aleados de alto contenido de carbono son aún difíciles de trabajar); si el material se enfría rápidamente a partir del rojo, sumergiéndolo en aceite o agua, el carbono permanece formando cementita y el acero será resistente, duro y frágil. Esta fragilidad se reduce posteriormente con alguna disminución en la resistencia y dureza, calentándolo a una temperatura más baja y permitiendo que algo del carbono cambie su forma. A continuación se enumeran las tres condiciones descritas:
  - Recocido (o, a veces, normalizado)
  - Temple
  - Revenido
- Los *aceros maraging* son tratados térmicamente de un modo diferente, de forma que se obliga a una parte de uno de los elementos a romper sus enlaces con los otros constituyentes, dejando exactamente la cantidad correcta para obtener las propiedades deseadas en el material. Cuando se dispersa totalmente el

elemento en cuestión a través de todo el material se dice que está en *solución*, y cuando está cambiando se dice que está *precipitando*. Los tratamientos térmicos que inducen el cambio de una condición a otra son llamados por ello *tratamiento de solución* y *tratamiento de precipitación*.

- El tratamiento térmico de las *aleaciones de aluminio* sigue aproximadamente los mismos pasos que el del acero. Esto es, una aleación puede estar en el estado blando o *recocido* y, entonces, puede aumentarse su resitencia progresivamente por tratamiento de *solución* y *precipitación*, que son casi equivalentes al proceso de revenido de los aceros. Debido al trabajo en frío, las láminas de aleaciones ligeras salen de las laminadoras en una condición que podría describirse como "no natural", y antes de suministrarse al fabricante de aviones se calienta y enfría para cambiar sus características, dispersando los cristales de los elementos aleados homogéneamente en todo el material. Este tratamiento de solución particular o proceso de *normalización* se lleva a cabo sumergiendo el material en un baño de sal fundida o introduciéndolo en un horno de aire caliente a aproximadamente 450°C durante alrededor de media hora antes de sumergirlo en agua.

  Una propiedad interesante de la mayoría de las aleaciones ligeras es que inmediatamente después de normalizado y durante aproximadamente media hora, el metal se mantiene blando. Esta propiedad es útil para el proceso de fabricación de doblado y conformación. Después de aproximadamente una hora, el material sometido a tratamiento de solución comienza a madurar, endureciéndose. Este es un proceso importante porque continúa con cierta amplitud a lo largo de toda la vida del material y de los componentes fabricados con él. El tratamiento de precipitación es artificial, y se denomina *maduración artificial* o *acelerada*.

2.9 Numeración de referencia para los materiales

El número de las diferentes variables de los materiales utilizados en la construcción aeronáutica es enorme y completamente desconcertante. Todos los países más importantes tienen sus propias aleaciones y, para evitar la confusión, cada uno tiene su propio sistema de enumeración de referencia único. Realmente, algunos países tienen más de un sistema: por ejemplo, el Reino Unido tiene al menos dos para los materiales aeroespaciales, y los E.E.U.U. tienen al menos tres sólamente para el aluminio.

Uno de los sistemas americanos se ha adoptado, al menos en teoría, como un estándar internacional y numerosos proveedores de aluminio se refieren a él en sus catálogos. En este sistema, que fue diseñado por la *Aluminum Association*, a las aleaciones se les asigna un número de código de cuatro dígitos, seguido por un código que identifica el estado del tratamiento térmico. El modelo del número completo presenta un aspecto similar a éste:

2024-T3

El primer dígito indica el principal elemento de la aleación; hay un total de siete grupos, de los cuales sólo las Series 1000, 2000, 6000 y 7000 tienen suficiente interés para el ingeniero aeronáutico de estructuras. El código es como sigue:

Series 1000 : aluminio puro (99% de pureza)
Series 2000 : aleaciones de cobre
Series 6000 : aleaciones de magnesio
Series 7000 : aleaciones de zinc

De los tres grupos de aleaciones estudiadas en el Apartado 2.2, el primer grupo (duraluminio) pertenece a la Serie 2000; el tercer grupo, a la Serie 7000, y el segundo grupo (conocido en el Reino Unido como derivados de aleación *"Y"*) está principalmente en las Series 2000, pero hay variantes en las Series 6000.

El segundo dígito del código denota una revisión a la aleación original (así, por ejemplo, el 2618 es la sexta modificación de una aleación que originalmente se denominaba 2018).

Los dígitos tercero y cuarto son números de índice.

Después del guión, los códigos principales relacionados con materiales aeronáuticos son:

– *0* : recocido
– *T3* : solución tratada y posteriormente trabajada en frío (p.ej., laminada), lo que mejora las propiedades mecánicas
– *T4* : solución tratada y madurada naturalmente
– *T6* : solución tratada y madurada artificialmente

Hay una gran cantidad de estos códigos de tratamientos térmicos para cubrir condiciones complejas; por ejemplo, – T6511 es una subvariante de la – T6 indicando que el producto ha sido aliviado de esfuerzos por estirado, y posteriormente reforzado.

Los sistemas de numeración de referencia americanos para los aceros utilizan también un código de cuatro dígitos que no tiene ninguna relación con el del aluminio. Esto es una dificultad importante de este sistema, ya que puede llevar a confusión. Afortunadamente, los principales aceros para la aviación están dentro de los grupos 3000 y 4000, que no se corresponden con los aluminios para aviación. Además, el número está precedido normalmente por las letras *SAE* (*Society of Automotive Engineers*). Pero hay que tener cuidado en no confundirse; por ejemplo, un tornillo fabricado en SAE2330 es de acero, no de aluminio aleado con cobre.

Otros sistemas de numeración utilizados en E.E.U.U. son específicamente federales, militares y de material aeroespacial, y presentan un aspecto como los siguientes:

QQ-A-367
MIL-A-22771
AMS.4127

Estos sistemas cubren también materiales no metálicos. De hecho, hay especificaciones *MIL* que cubren cualquier material aeronáutico imaginable, incluído hilo de coser. Por ejemplo, un producto adhesivo puede tener especificación federal "MM-A-132, Type 1, Class 3", o bien "MIL-A-5090-D, Type 1".

Aquí es preciso una llamada más de atención: los números de la *Aluminum Association* identifican el material, pero las especificaciones federales y militares enumeran los requerimientos de dicho material. Esto realmente es competencia del control de calidad.

Las especificaciones oficiales, enumerando los estándar de prestaciones mínimas y exigiendo que éstos deban ser demostrados mediante ensayos, constituyen un evidente nivel de confianza para el proyectista y para el eventual usuario, así como una base inequívoca respecto de la cual el fabricante de material puede establecer los precios.

Capítulo 3

Cargas sobre el avión

Básicamente, los aviones convencionales están constituídos por el *fuselaje*, las *alas* y los *estabilizadores*. El fuselaje contiene a la tripulación y la carga de pago, la cual está formada por los pasajeros, la carga, las armas y el combustible, según el tipo de avión y su función; las alas producen la sustentación, y los estabilizadores son los principales responsables del control de la dirección. Además de estos elementos principales, los *alerones* y *timones* permiten al piloto maniobrar el avión y mantener su estabilidad en vuelo, mientras que los *"flaps"* del ala producen el aumento de sustentación necesario para el despegue y el aterrizaje.

La estructura de un avión ha de soportar, en general, dos clases distintas de cargas:

- *Cargas de suelo*, que incluyen todas las cargas a que se encuentra sometido el avión durante su movimiento o transporte en tierra, aterrizaje, remolcado, izado, etc.

- *Cargas de vuelo*, que incluyen todas las cargas impuestas sobre la estructura por las maniobras y ráfagas que tienen lugar durante el vuelo.

Además de estas cargas generales, existen otros tipos de cargas particulares a las que se encuentran sometidos los aviones diseñados para un propósito determinado. Por ejemplo, la mayoría de los aviones civiles de gran tamaño, así como la práctica totalidad de los aviones militares, van presurizados para poder volar a gran altitud; los hidroaviones han de ser capaces de "aterrizar" sobre el agua; los aviones diseñados para volar a gran velocidad y baja altitud, como por ejemplo el *Tornado*, han de ser capaces de soportar los efectos de grandes turbulencias; etc.

Las dos clases de cargas generales anteriormente citadas pueden, a su vez, ser de dos tipos:

- *Fuerzas de superficie*, que actúan sobre la superficie de la estructura, por ejemplo presiones aerodinámicas o hidrodinámicas.

- *Fuerzas de inercia*, que actúan sobre la masa de la estructura y son producidas por efectos gravitacionales e inerciales.

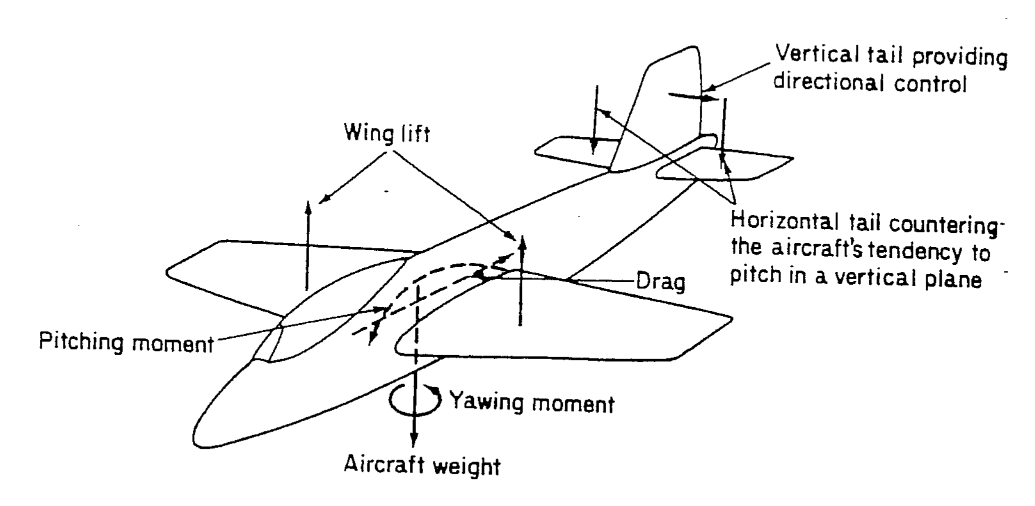


Figura 3.1: Principales fuerzas aerodinámicas sobre un avión en vuelo

3.1 Cargas de vuelo

Básicamente, todas las cargas de vuelo son las resultantes de las distribuciones de presiones que se producen sobre las diferentes superficies del avión en las condiciones de vuelo uniforme, maniobra y ráfaga. Generalmente, estas resultantes producen cargas de flexión, cortadura y torsión en todas las partes de la estructura, así como cargas normales de presión actuando normalmente sobre los paneles del revestimiento. En la figura 3.1 se muestran las resultantes de las principales cargas a que se encuentra sometido un avión durante el vuelo.

3.1.1 Vuelo uniforme

El principio del vuelo de un avión es bien conocido:

Al pasar el aire a través de una superficie aerodinámica (alas o estabilizadores), y debido al ángulo que forma la dirección del flujo del aire con la cuerda del perfil (*ángulo de ataque*), a la curvatura del perfil o a la suma de ambos efectos, se produce una disminución de la presión del aire en la parte superior del perfil (extradós) y un aumento en la inferior (intradós). Esta distribución diferencial de presiones da como resultado una presión neta sobre el perfil que trata de forzarlo hacia arriba y hacia atrás. Por otra parte, se observan dos hechos importantes:

- La disminución de presión que se produce en el extradós es mayor que el aumento en el intradós, por lo que la contribución a la sustentación debida a la succión en el extradós es mayor que la del empuje en el intradós.

- La presión no está distribuída por igual, sino que tanto los aumentos como las disminuciones de presión son mayores cerca del borde de ataque.

Estos fenómenos tienen consecuencias estructurales. En efecto, por una parte, el revestimiento del extradós ha de estar sujeto a las costillas ya que se produce una succión sobre él, mientras que el del intradós no necesitaría sujetarse puesto que la acción de la presión lo aprieta contra las costillas. Por otro lado, la parte delantera de las costillas ha de ser mucho más fuerte que la correspondiente al borde de salida.

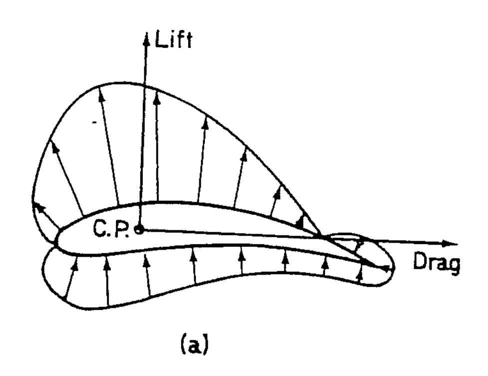


Figura 3.2: Distribución típica de presiones en un perfil aerodinámico

En la figura 3.2 se muestra una distribución de presiones típica sobre un perfil aerodinámico. Esta distribución tiene una resultante que actúa en un punto denominado *centro de presión*. Esta fuerza resultante se puede descomponer en dos fuerzas, una paralela a la dirección del flujo de aire, denominada *resistencia al avance*, y otra perpendicular a la dirección del flujo, llamada *sustentación*.

La fuerza de sustentación originada por la distribución de presiones ha de equilibrar al peso del avión; sin embargo, ambas fuerzas tendrán diferente punto de aplicación. De forma similar, el empuje proporcionado por los motores ha de vencer la resistencia aerodinámica, no teniendo tampoco ambas fuerzas la misma línea de acción. Por todo ello, aparecerá un momento que tendrá que compensarse mediante una fuerza en la cola del avión. En la figura 3.3 se representan esquemáticamente las cargas que actúan sobre un avión en un vuelo uniforme.

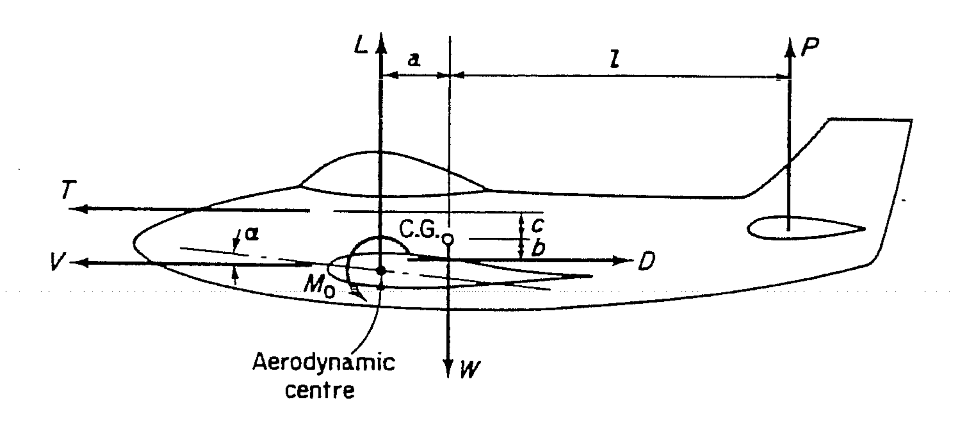


Figura 3.3: Resultantes de cargas sobre un avión en vuelo uniforme

Se observa que cuando varía el ángulo de ataque se modifica considerablemente la distribución de presiones sobre el perfil. En la figura 3.4 se representa una distribución típica de presión sobre un perfil a distintos ángulos de ataque (sólo se representa la componente de sustentación).

Por lo que respecta a la sustentación, para un ángulo de ataque de 0^o tiene un valor determinado debido a la curvatura del perfil (existe un ángulo que corresponde

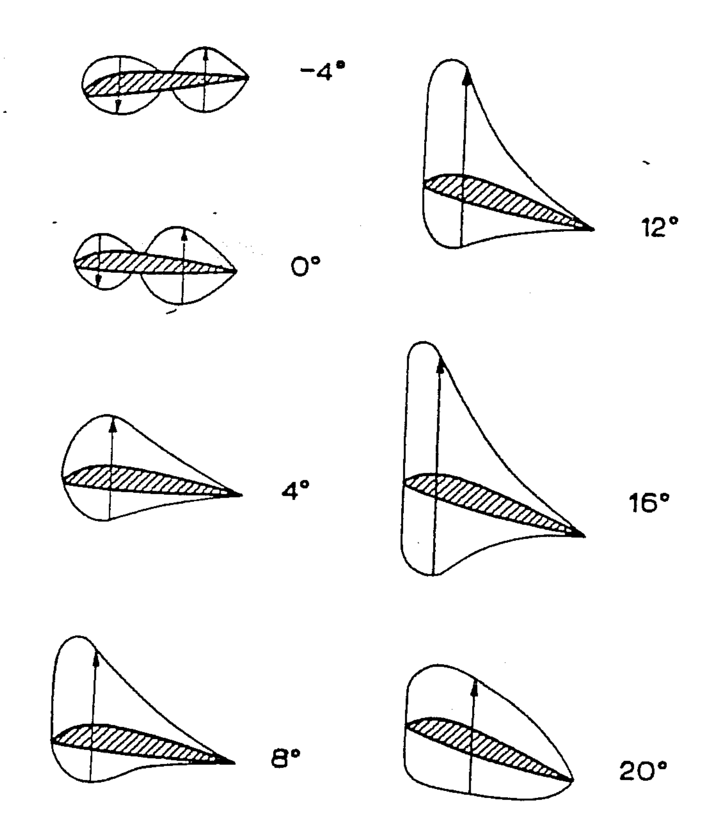


Figura 3.4: Distribuciones de presión para distintos ángulos de ataque

a sustentación nula). Entre 0^o y 12^o la sustentación aumenta de modo prácticamente uniforme con el ángulo de ataque. Por encima de 12^o, aunque sigue aumentando la sustentación, el incremento es ahora comparativamente pequeño y el gráfico se curva hasta llegar a un máximo, el cual tiene lugar para un ángulo de ataque de 15^o aproximadamente. Por encima de este ángulo, la sustentación comienza a disminuir debido a que el flujo del aire se convierte en turbulento en vez de laminar, y el perfil entra en pérdida (ver figura 3.5). Para ángulos inferiores al de sustentación nula, ésta se hace negativa, permitiendo conseguir vuelos invertidos en aviones acrobáticos.

En cuanto a la resistencia al avance, tiene un valor mínimo correspondiente a un ángulo negativo próximo a los 0^o, y aumenta a ambos lados de este ángulo. Hasta los 6^o el aumento de resistencia al avance no suele ser muy rápido, para ir haciéndose cada vez mayor a medida que aumenta el ángulo de ataque, especialmente después del ángulo de entrada en pérdida, cuando el flujo se hace turbulento (ver figura 3.6).

Con un perfil aerodinámico se pretende obtener siempre una gran sustentación con una mínima resistencia al avance. De las figuras 3.5 y 3.6 se deduce que la sustentación máxima se obtiene para ángulos de alrededor de 15^o, mientras que la resistencia mínima corresponde a ángulos del orden de 0^o. Sin embargo, ambos están en los límites de la gama de ángulos posibles y en ninguno de ellos se consiguen realmente las mejores condiciones para el vuelo, ésto es, la mejor sustentación en comparación con la resistencia al avance, o lo que es lo mismo, la mejor relación sustentación / resistencia al avance.

En la figura 3.7 se representa la relación sustentación / resistencia al avance en función del ángulo de ataque. En ella se observa que dicha relación aumenta con gran rapidez hasta alrededor de 3^o a 4^o, ángulos para los que la sustentación

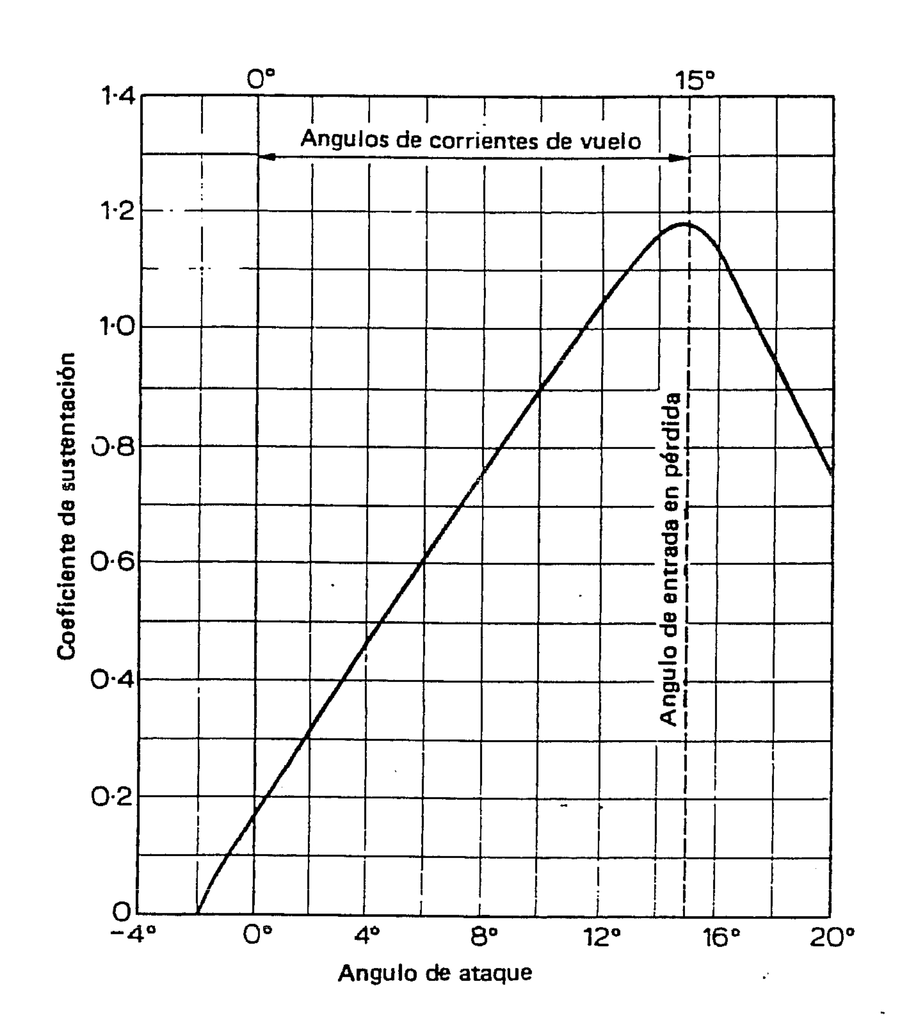


Figura 3.5: Variación de la sustentación con el ángulo de ataque

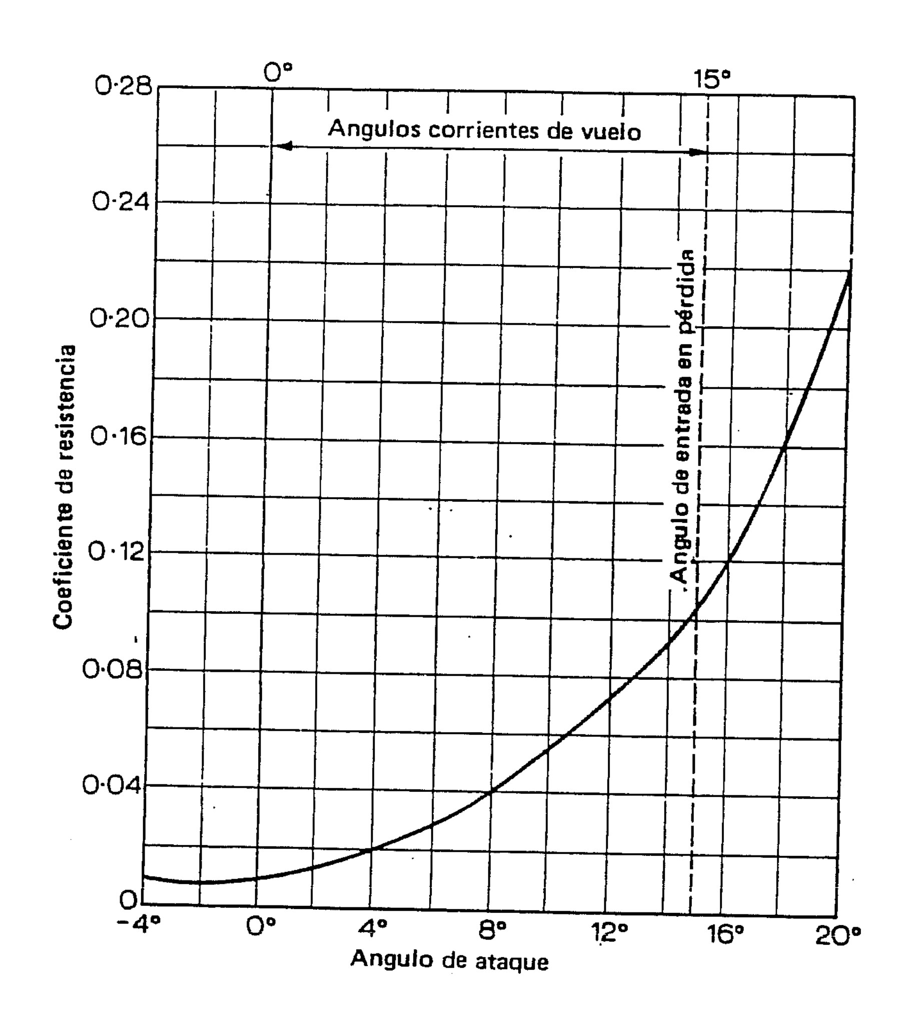


Figura 3.6: Variación de la resistencia con el ángulo de ataque

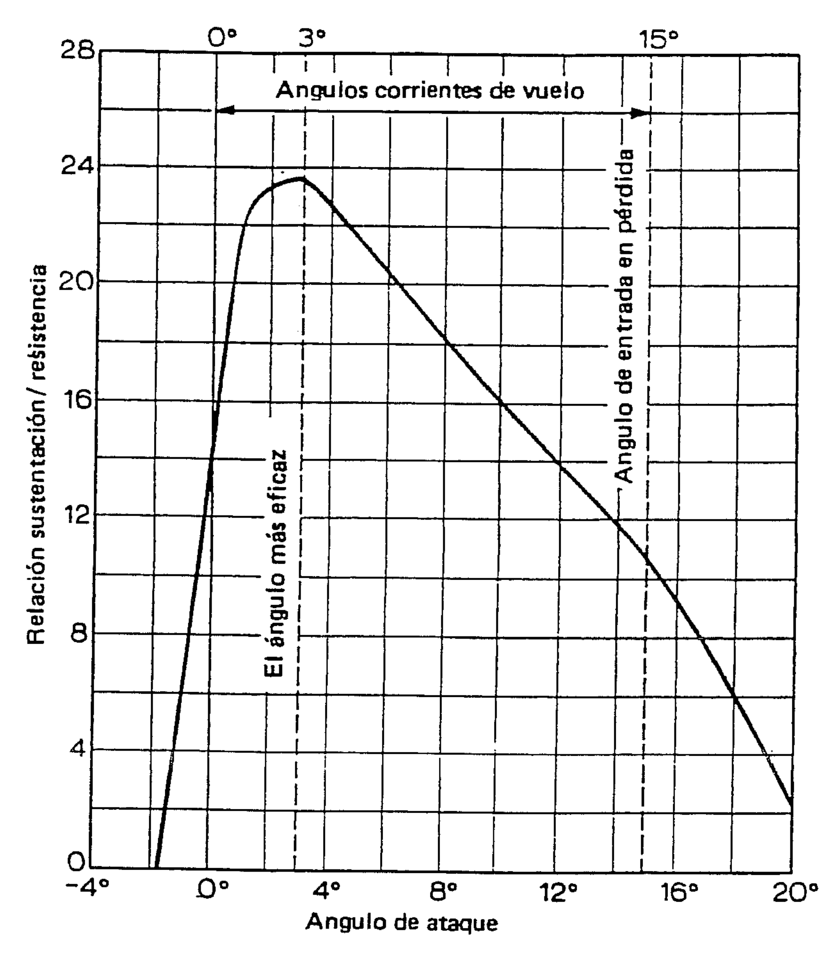


Figura 3.7: Variación de la sustentación/resitencia al avance con el ángulo de ataque

es casi 24 veces la resistencia al avance (algunos perfiles dan incluso una relación mayor); la relación desciende luego gradualmente porque, aunque la sustentación sigue aumentando, la resistencia al avance lo hace más rápidamente. Para el ángulo de entrada en pérdida, la sustentación puede ser sólamente 10 a 12 veces mayor que la resistencia al avance, y para ángulos mayores desciende todavía más.

En consecuencia, de la curva de la figura 3.7 se deduce que el ángulo para el que el perfil da sus mejores resultados, llamado a veces *ángulo óptimo*, está alrededor de 3^o a 4^o. A ésto se debe que cuando un avión está en vuelo horizontal de crucero, las alas golpeen el aire a este ángulo aproximadamente, en lugar de a un ángulo de 15^o (que daría la sustentación requerida a una velocidad lenta y antieconómica) o de 0.5^o (que daría la sustentación requerida a una velocidad rápida y también antieconómica). A pesar de lo dicho, la tendencia moderna, especialmente en aviones de gran velocidad, es ajustar las alas para vuelo horizontal en un ángulo menor que el ángulo óptimo, pero ésto es debido a que el diseñador busca velocidad en lugar de economía.

Estos cambios en la distribución de presiones sobre el perfil dan lugar a desplazamientos del centro de presión. Volviendo a la figura 3.4, se observa que a un ángulo negativo, e incluso a 0^o, la presión sobre el extradós cerca del borde de ataque aumenta por encima de la normal y que en el intradós disminuye; esto da lugar al lazo en el diagrama de presión, por lo que existe un momento de cabeceo de picado sobre el perfil. Para estos ángulos negativos el centro de presión está muy atrás a fin

de que la resultante de la presión produzca el mismo momento que la distribución de la misma. A medida que aumenta el ángulo de ataque, el centro de presión se desplaza hacia adelante hasta llegar a situarse a 1/3 de la cuerda aproximadamente para un ángulo de unos 16°. Por encima de este ángulo comienza a desplazarse hacia atrás de nuevo.

Existe un punto en la sección del perfil respecto al cual el momento de cabeceo producido por la distribución de presiones sobre el perfil (o por la sustentación y resistencia al avance resultantes) no cambia cuando se varía el ángulo de ataque. Este punto se denomina *centro aerodinámico* del perfil. Debido a las variaciones que experimenta la posición del centro de presiones, resulta mucho más conveniente referir la distribución de presiones sobre el perfil al centro aerodinámico en vez de hacerlo al centro de presiones, obteniéndose como resultantes las fuerzas de sustentación y resistencia al avance más un momento de cabeceo constante (ver figura 3.8). Actualmente, para números de Mach altos la posición del centro aerodinámico también cambia debido a efectos de compresibilidad.

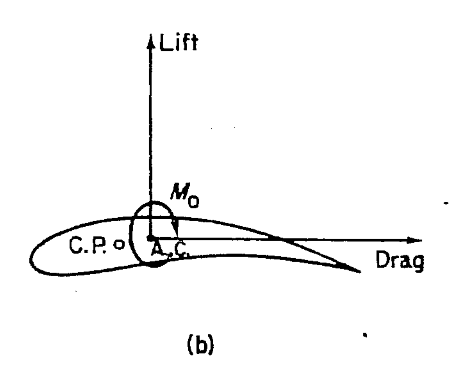


Figura 3.8: Resultantes de la distribución de presiones en el centro aerodinámico

Mientras que la distribución de presiones a lo largo de la cuerda determina la posición de la carga aerodinámica resultante en la sección transversal del ala, la distribución a lo largo de la envergadura determinará su posición en relación con la raíz del ala. En la figura 3.9 se muestra una distribución típica para una combinación fuselaje/alas. En las superficies de los estabilizadores existen distribuciones similares.

Como consecuencia de las cargas aerodinámicas que actúan sobre ellos, el fuselaje, las alas y los estabilizadores estarán sometidos a cargas de flexión, cortadura y torsión, debiendo ser diseñados para soportar las combinaciones más críticas de dichas cargas.

3.1.2 Maniobras y ráfagas

En el Apartado anterior se ha considerado que el avión está en vuelo uniforme, es decir en línea recta y velocidad constante. Cuando el avión realiza una maniobra opone, en virtud de su inercia, una resistencia a modificar su dirección o velocidad, apareciendo sobre él unas fuerzas denominadas *fuerzas de inercia*. La

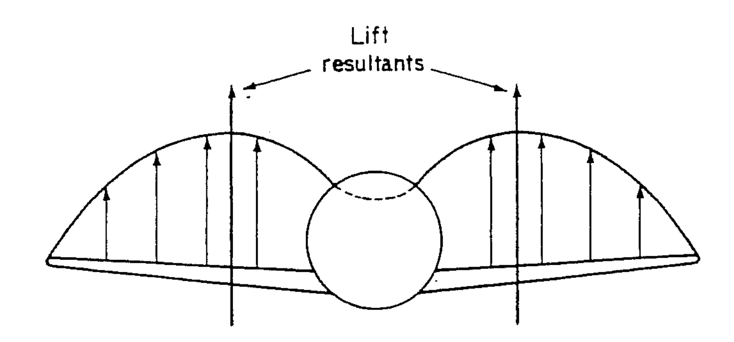


Figura 3.9: Distribución típica de sustentaciones para combinación fuselaje-alas

forma de considerar estas fuerzas es suponer que durante la maniobra aumenta el "peso aparente" de todo lo que va en el avión en un factor n del peso debido a la gravedad. En algunos casos, el factor n se determina mediante cálculos, pero normalmente sus valores están especificados en las Normas de Aeronavegabilidad de los distintos países.

La presentación de los requisitos de aeronavegabilidad para el factor de inercia o de carga n viene dada normalmente mediante un diagrama V-n como el que se representa en la figura 3.10. Este diagrama representa una envolvente de maniobras. Las distintas combinaciones de velocidad y carga dentro de la envolvente dan los diferentes casos de carga.

Se usa un diagrama similar V-n para representar la envolvente de ráfagas que cumple con los requisitos de aeronavegabilidad para las cargas que actúan sobre el avión cuando éste se encuentra una corriente de aire. Estas ráfagas producen una aceleración y, por tanto, se origina el correspondiente aumento de "peso aparente" en la misma forma que en las maniobras. Las ráfagas pueden tener cualquier dirección y, en general, resultan más críticas cuanto mayor es la velocidad del avión.

Nótese que las maniobras y las ráfagas no producen cargas de distinta naturaleza a las existentes en el avión durante un vuelo uniforme, sino que sólo modifican la amplitud y posición de dichas cargas, dado que el avión es considerado como si tuviera un mayor "peso aparente".

3.2 Cargas de suelo

Las cargas de suelo producidas en el aterrizaje y en los desplazamientos en tierra del avión, originan en él fuerzas concentradas que actúan a través del tren de aterrizaje.

La mayoría de los aviones tienen un tren de aterrizaje principal situado en las alas y los trenes de morro o de cola situados en el plano vertical de simetría. La posición del tren principal de aterrizaje se determinará de modo que se produzcan las menores cargas posibles en el ala, preservando la estabilidad del avión durante las maniobras de tierra. Téngase en cuenta que las cargas de suelo dan lugar a flexiones, cortaduras y torsiones en el ala. A fín de disminuir la flexión, se ha de procurar

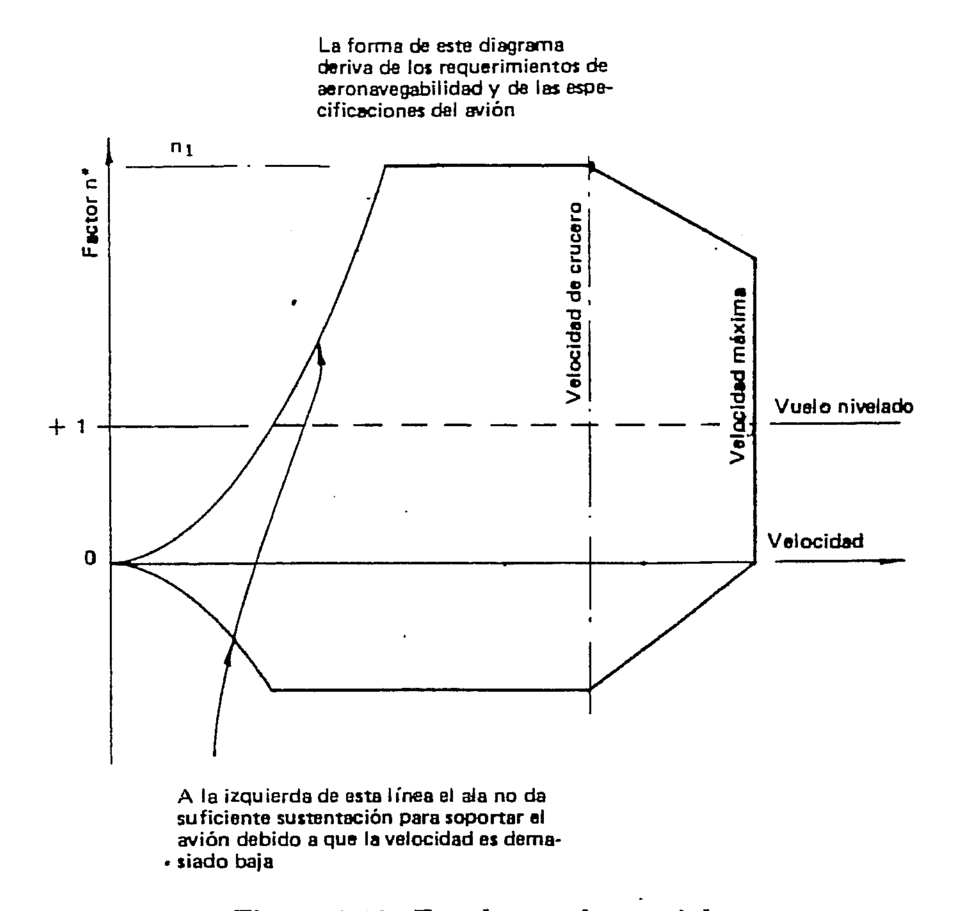


Figura 3.10: Envolvente de maniobras

situar el tren de aterrizaje lo más cerca posible de la raíz del ala; en cuanto a la torsión, se reducirá lo máximo posible contrarrestando el momento torsor causado por la fuerza vertical que actúa a través del tren de aterrizaje con el momento de signo opuesto debido al frenado del avión.

3.3 Cargas particulares

Aparte de las cargas descritas en los dos Apartados anteriores, existen otras cargas que actúan de modo particular en determinados tipos de aviones.

- En aquellos aviones que tienen el fuselaje presurizado aparecen esfuerzos de tracción circunferencial que pueden llegar a tener un valor realmente importante. El problema es mayor si el fuselaje no es de sección circular ya que, debido a la presión interna, tenderá a volverse circular, apareciendo cargas de flexión en las cuadernas. El fuselaje del tipo *doble burbuja* es una excepción ya que en él se mantiene la forma por medio de la tracción en las vigas del piso de la cabina.

- Las alas pueden llevar armas y/o tanques de combustible que darán lugar a fuerzas aerodinámicas y de inercia adicionales que contribuyen a las cargas de flexión, cortadura y torsión existentes.

- También será necesario considerar el peso y el empuje de los motores, que pueden afectar a las alas o al fuselaje, dependiendo de dónde estén situados.

Estas cargas suelen ser simétricas respecto al plano vertical de simetría del avión, pero en el caso de fallo de un motor darían lugar a flexiones muy importantes en el fuselaje debidas al par producido por el empuje del otro motor y la fuerza que aparecerá en el estabilizador vertical para intentar equilibrar el momento producido por aquella (ver figura 3.11).

- En los hidroaviones será necesario considerar las cargas de impacto producidas por el amerizaje, así como las presiones hidrodinámicas sobre el fuselaje.

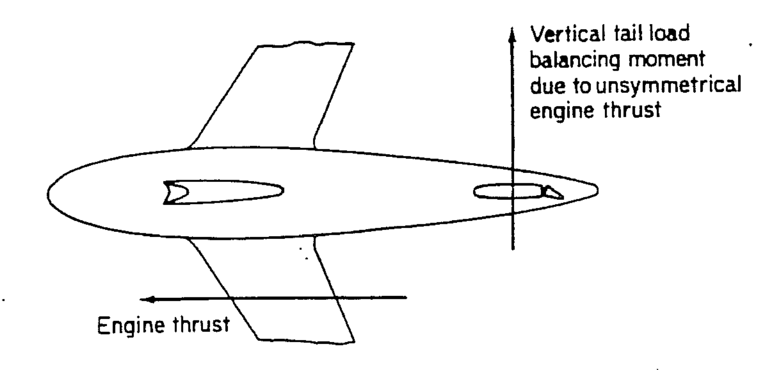


Figura 3.11: Cargas producidas por el fallo de un motor

La enumeración de este tipo de cargas particulares se haría interminable pues existen tantas como tipos de aviones, dependiendo de la función de cada uno de ellos.

3.4 Factores de carga adicionales

En los Apartados anteriores de esta Sección se han descrito de forma general las cargas principales que actúan sobre un avión. Los Departamentos de Masas, Aerodinámica, etc. suministrarán al Departamento de Estructuras los valores de estas cargas. Posteriormente, los ingenieros de este Departamento descompondrán cada carga y la distribuirán a lo largo de la estructura, calculando cada elemento para la combinación más crítica posible de los casos de carga. En consecuencia, irán obteniendo las dimensiones correspondientes de cada elemento de la estructura, procurando siempres que éstos tengan el peso mínimo posible compatible con la seguridad del avión.

En el diseño de un avión es de enorme importancia el control del peso; cuanto mayor sea el peso será necesario utilizar estructuras más fuertes para soportarlo, lo cual dará lugar a un nuevo aumento de peso, y así sucesivamente. Además, un exceso en el peso de la estructura dará lugar a que disminuya la carga de pago del avión, con el consiguiente perjuicio económico. Sin embargo, la reducción del peso ha de estar siempre supeditada al mantenimiento de la seguridad del avión.

A fín de asegurar unas condiciones mínimas de resistencia y seguridad, las Normas de Aeronavegabilidad de cada país fijan unos factores que deben ser cumplidos

por las estructuras primarias del avión. En primer lugar se definen los siguientes tipos de cargas:

- *carga límite*, que es la carga máxima a que se espera que pueda estar sometida la estructura del avión durante su operación normal.
- *carga de prueba*, que es el producto de la carga límite por el *factor de prueba* (con un valor comprendido entre 1 y 1.25).
- *carga última*, que es el producto de la carga límite por el *factor último* (con un valor igual a 1.5, normalmente).

A continuación, se exigen los siguientes requerimientos:

- la estructura del avión ha de ser capaz de soportar la carga de prueba de tal forma que:
  - las deformaciones máximas que se produzcan en cualquier elemento no impidan la operación segura del aparato.
  - no se produzcan deformaciones permanentes perjudiciales una vez que hayan desaparecido las cargas.
- la estructura del avión ha de ser capaz de soportar la carga última sin que se produzca el fallo de la misma, si bien se permite que las deformaciones producidas en este caso sean lo suficientemente grandes como para inutilizar el aparato para un uso posterior.

Los factores de prueba y último deben ser considerados como factores de seguridad, e intentan cubrir diferentes contingencias que puedan aparecer durante la vida del avión.

Los factores de seguridad utilizados en la industria aeronáutica son bastante bajos en comparación con los de los otros campos de la ingeniería. Esto es debido, fundamentalmente, a que el ahorro de peso es un factor más determinante en aquella que en éstos. Dado que la seguridad es un requerimiento primario del diseño, será necesario comprobar la exactitud de los resultados obtenidos en los análisis teóricos mediante ensayos estáticos, dinámicos y de fatiga mediante los que se verifique que la estructura es capaz de soportar las cargas de diseño.

Capítulo 4

Función de las estructuras aeronáuticas

Las funciones básicas de la estructura de un avión son:

- Proveer una forma aerodinámica.
- Resistir y transmitir las cargas aplicadas.
- Proteger a los pasajeros, la carga de pago, los sistemas, etc., de las condiciones ambientales existentes durante el vuelo.

Estos requerimientos son cubiertos, en la mayoría de los aviones actuales, por estructuras de pared delgada en las que la superficie exterior o revestimiento está reforzada por elementos longitudinales (largueros y larguerillos) y transversales (costillas, cuadernas y mamparos), de modo que el conjunto es capaz de resistir las cargas axiales, de flexión, de cortadura y de torsión existentes sin que se produzca el fallo del mismo. Tales estructuras son conocidas con el nombre de *estructuras semi-monocasco*, a diferencia de las *estructuras monocasco* en las que las cargas son soportadas exclusivamente por el revestimiento sin reforzar.

4.1 Alas y superficies aerodinámicas

Los diferentes tipos de disposiciones estructurales que se pueden encontrar en las alas, si bien realizan la misma función, pueden variar ampliamente en su complejidad estructural, como se puede comprobar comparando, por ejemplo, las figuras 4.1 y 4.2. En la figura 4.1 se muestra un pequeño y ligero avión de pasajeros típico, el *De Havilland Canada Twin Otter*, mientras que en la figura 4.2 se muestra un avión de combate, el *Harrier*. Como se puede observar, la estructura de las alas del primero es mucho más simple que las del segundo. Sin embargo, los diferentes elementos que componen ambas estructuras desempeñan funciones similares, con independencia de la mayor o menor complejidad que presenta la disposición estructural de cada una.

Las funciones principales que ejercen los diferentes elementos que componen las estructuras del ala son las siguientes:

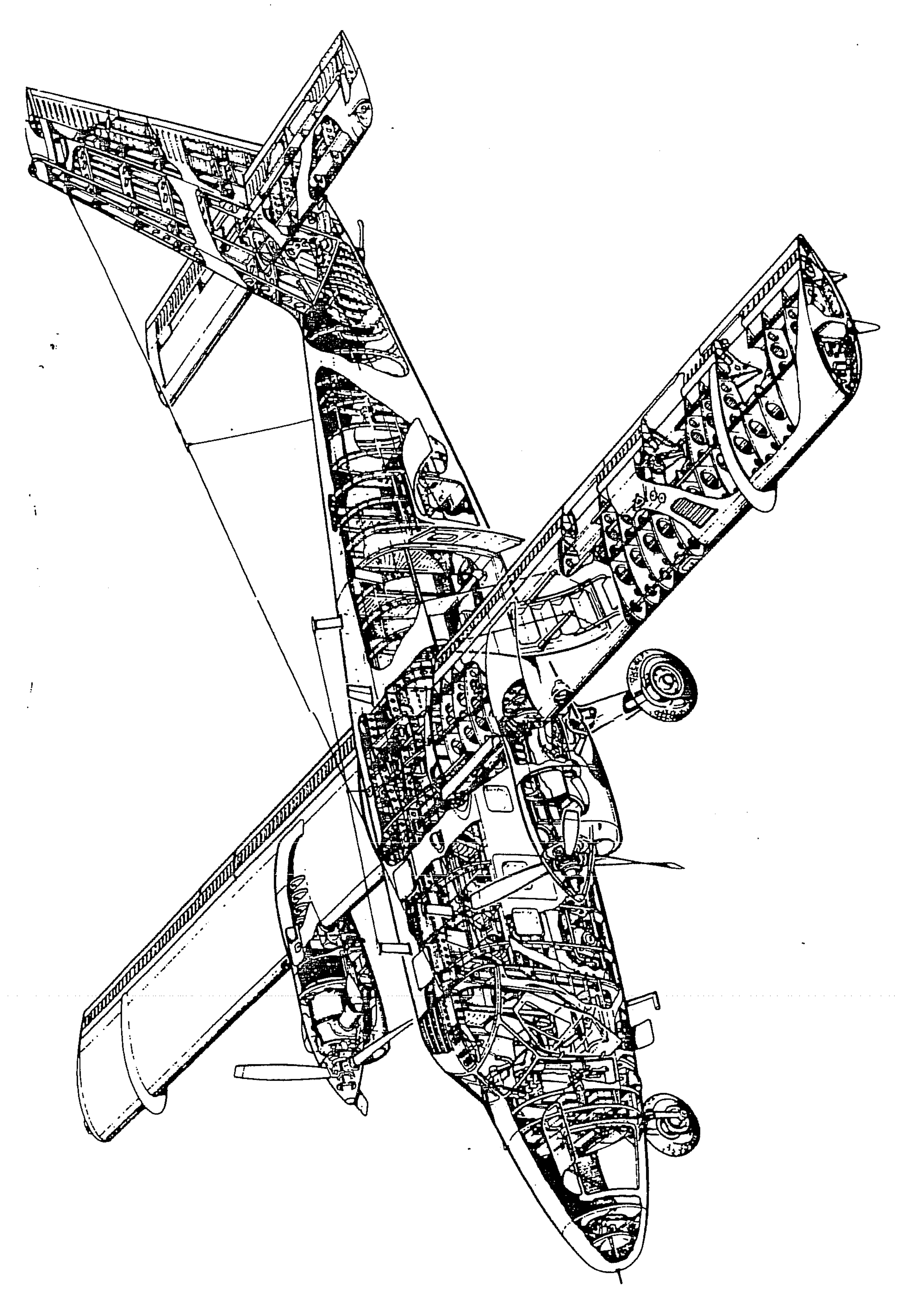


Figura 4.1: *De Havilland Canada. Twin Otter*

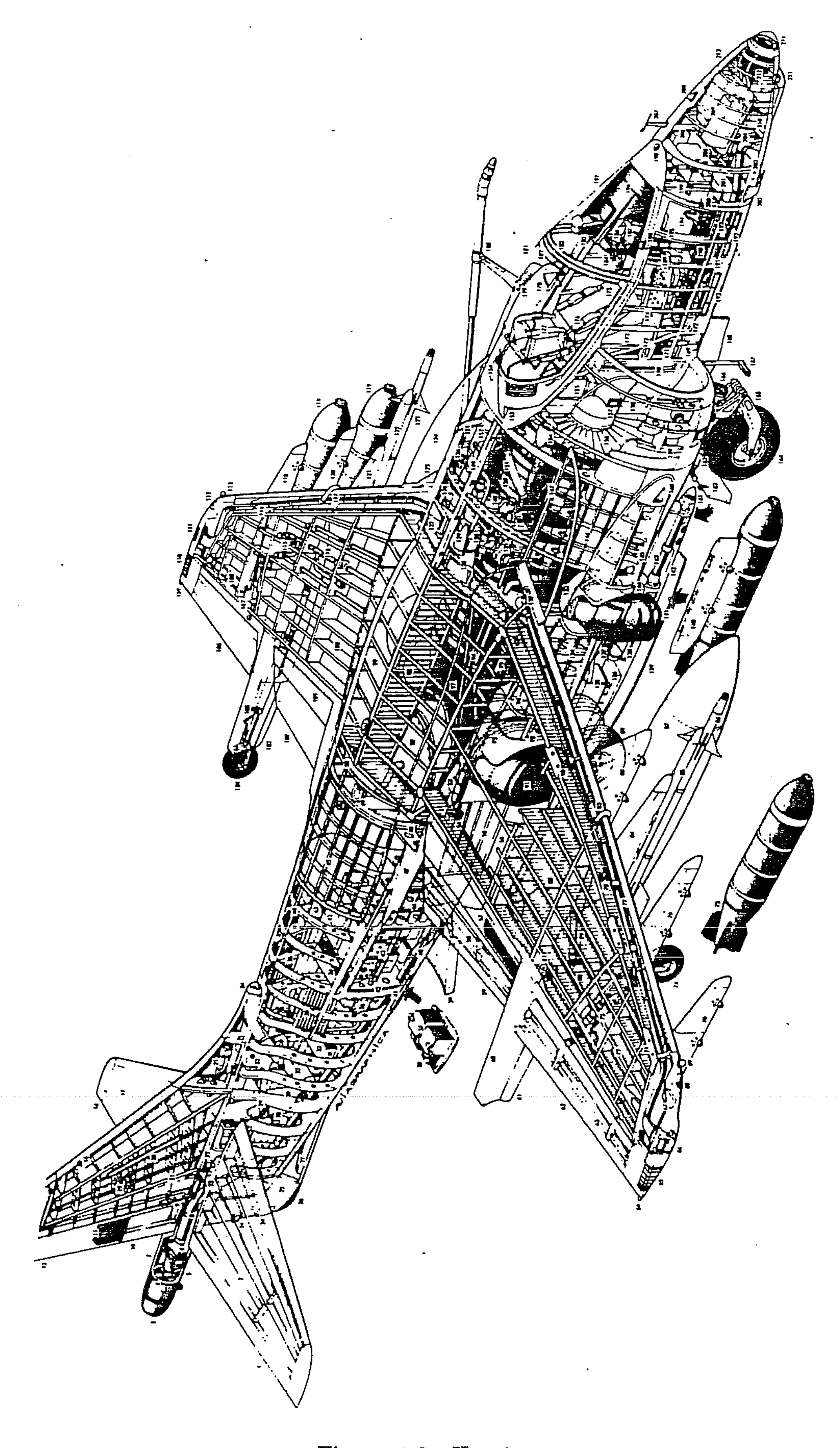


Figura 4.2: *Harrier*

- *Revestimiento*
La función primaria del revestimiento del ala es la de formar una superficie continua que soporte la distribución de presión aerodinámica de la que se deriva la capacidad de sustentación del ala. Estas fuerzas aerodinámicas actúan normalmente al revestimiento, haciéndolo trabajar como membrana y/o como placa en función del espesor del mismo, y transmitiéndose posteriormente a los larguerillos, costillas y largueros. Por otra parte, las fuerzas cortantes y los momentos torsores que actúan sobre el ala son soportados por el revestimiento y las almas de los largueros, mientras que las cargas axiales y de flexión lo son por la acción combinada del revestimiento y los larguerillos. En los aviones subsónicos el revestimiento suele tener poco espesor, siendo poco efectivo a la acción de las cargas axiales, sobre todo si son de compresión. Sin embargo, en los aviones supersónicos, debido a que las formas aerodinámicas de las alas son relativamente más delgadas y han de soportar grandes cargas, es necesario que el revestimiento tenga un espesor bastante más grueso, por lo que su efectividad a cargas axiales es mucho mayor. En general, el material estructural del revestimiento debería ser situado de manera que se obtuviese el máximo momento de inercia posible para cargas verticales; ésto corresponde a unas posiciones comprendidas entre el 15% y el 50% de la cuerda de la sección transversal, contadas a partir del borde de ataque. La estructura secundaria situada por detrás del cajón estructural debería ser hecha, por consiguiente, tan ligera como fuera posible. O lo que es lo mismo, cuanto más adelante esté situado el larguero posterior de cierre del cajón, tanto más ligera será la estructura total del ala.

- *Larguerillos*
El revestimiento del ala suele tener poco espesor, sobre todo en los aviones subsónicos. Por ello, si bien es efectivo para resistir las cargas de tracción y de cortadura, sin embargo pandea para unas cargas de compresión relativamente bajas. Aunque se podría aumentar el espesor del revestimiento a fín de obtener unos admisibles de pandeo mayores, ésto conduciría a un incremento excesivo de peso, por lo que es más efectivo reforzar el revestimiento con larguerillos y costillas que lo subdividen en pequeños paneles, con el consiguiente aumento de dichos admisibles. Más aún, este tipo de disposición aumenta considerablemente la efectividad del revestimiento a compresión, ya que ésta vendrá determinada por los esfuerzos de pandeo como columnas de los larguerillos más que por los de pandeo de los paneles del revestimiento.

- *Costillas*
La forma de la sección transversal del ala viene determinada por criterios aerodinámicos y debe ser mantenida para todas las combinaciones de carga a que se encuentra sometida el ala. Esta es una de las funciones principales de las costillas. Estas también trabajan junto con el revestimiento para resistir las cargas distribuídas procedentes de la presión aerodinámica. Otras funciones de las costillas consisten en resistir y transmitir al resto de la estructura las cargas concentradas (por ejemplo, las procedentes del tren de aterrizaje), así como en redistribuir entre los diferentes elementos los esfuerzos existentes alrededor de las aberturas y discontinuidades existentes en la superficie del ala. Además,

las costillas sirven de apoyo al revestimiento así como a los larguerillos que lo refuerzan, disminuyendo la longitud y aumentando, por consiguiente, los esfuerzos a los que se produce el pandeo de estos elementos; como consecuencia de ésto, se aumenta la efectividad del conjunto a compresión.

Las dimensiones de las costillas vienen determinadas por la posición que ocupan a lo largo de la envergadura del ala y por las cargas que tienen que soportar. En las partes más exteriores del ala, en las que su sección transversal suele ser pequeña debido a la conicidad y las cargas son bajas, la función principal de las costillas es mantener la forma aerodinámica. Por consiguiente, estas costillas tendrán una estructura bastante ligera. Sin embargo, cerca de la raíz del ala, las costillas tienen que absorber y transmitir grandes cargas concentradas, tales como las procedentes del tren de aterrizaje, del empuje de los motores y de las reacciones de los puntos de unión al fuselaje; por ello, estas costillas deben tener una estructura mucho más resistente. Entre estos dos extremos, están las costillas que soportan las reacciones de los alerones, los flaps y las restantes superficies de control, así como multitud de cargas internas provenientes de tanques de combustible, armamento, instalaciones de sistemas, etc.

- *Largueros*
  En cuanto a los largueros, como ya se ha indicado anteriormente, el alma de los mismos forma, junto con el revestimiento, una sección cerrada uni o multicelular, la cual es mucho más efectiva que una abierta para para resistir las cargas de cortadura y de torsión existentes en el ala. Estas cargas dan lugar a esfuerzos de cortadura en el alma de los largueros. Además, el alma estabiliza, junto con el revestimiento, los cordones de los largueros, por lo que son capaces de resistir grandes cargas de compresión producidas por los efectos axiales y de flexión. Por otra parte, los largueros ejercen sobre el revestimiento un efecto estabilizador similar al que ejercen los larguerillos.

Todo lo indicado hasta aquí referido a las alas es aplicable al resto de las superficies aerodinámicas del avión, salvo lo que se refiere a las cargas propias de las alas, como por ejemplo las procedentes del tren de aterrizaje, del empuje de los motores, etc.

4.2 Fuselajes

Los fuselajes, si bien tienen formas diferentes a las de las superficies aerodinámicas, sin embargo están compuestos por elementos que desempeñan funciones similares a las de los existentes en las alas y estabilizadores.

Las cargas a que se encuentran sometidas las estructuras de un fuselaje son de naturaleza diferente a las que actúan sobre las superficies aerodinámicas. En efecto, las fuerzas aerodinámicas sobre el revestimiento del fuselaje son relativamente pequeñas. Por el contrario, sobre él actúan cargas concentradas muy grandes, tales como las reacciones de las alas, de los estabilizadores y de los trenes de aterrizaje, y además contiene cargas de pago de diferentes pesos y tamaños que dan lugar a fuerzas de inercia muy elevadas. Por otra parte, los aviones diseñados para volar

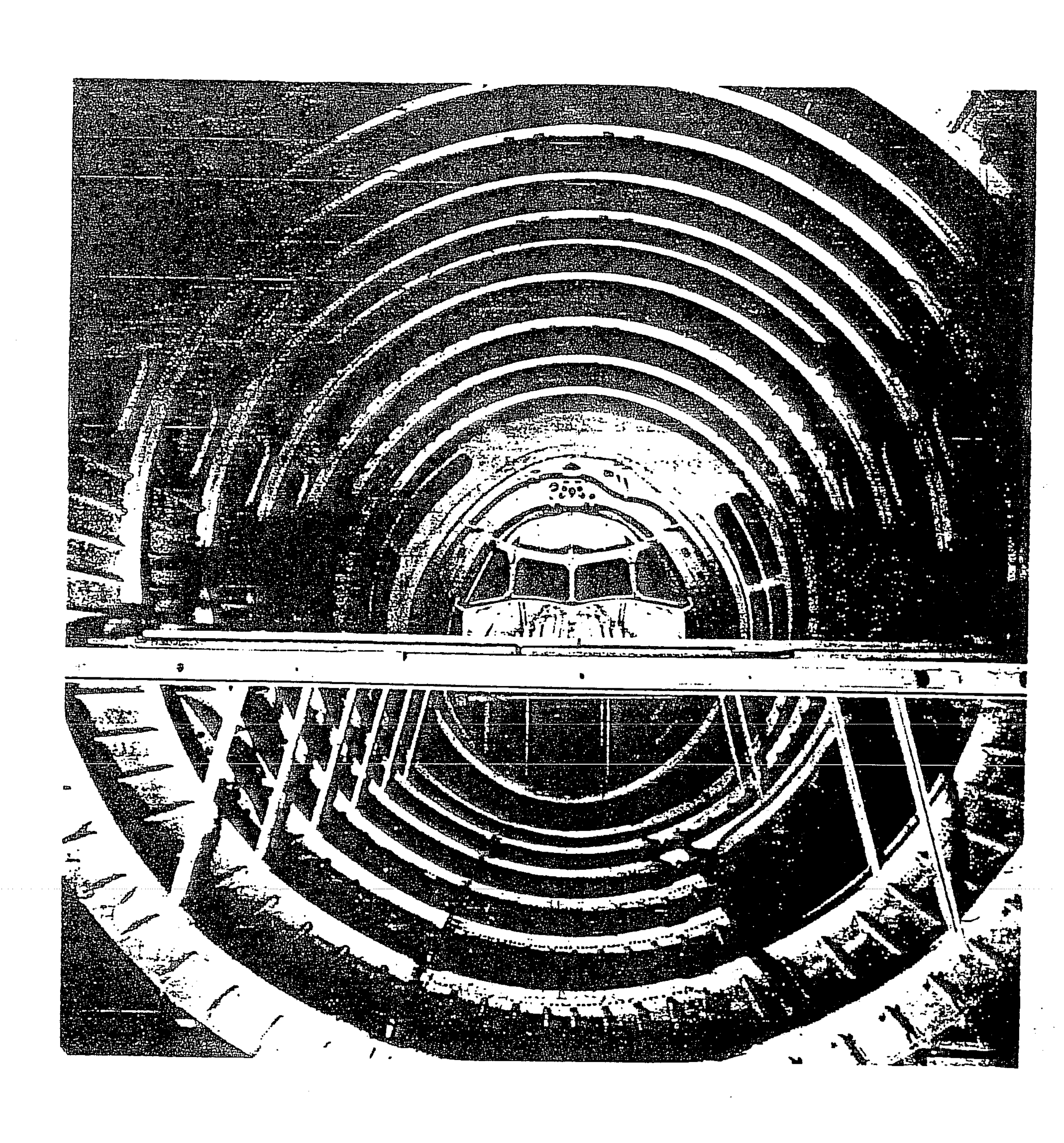


Figura 4.3: *British Aerospace 146*

a gran altitud tienen la cabina presurizada, por lo que el fuselaje ha de soportar también la presión interna.

La forma de la sección transversal del fuselaje viene determinada por requerimientos operativos. Así, por ejemplo, la forma de sección transversal más eficiente para un fuselaje presurizado es la circular o una combinación de elementos circulares (fuselajes de *doble burbuja*).

Independientemente de la forma que tenga su sección transversal, básicamente el fuselaje es un tubo unicelular de pared delgada constituído por el *revestimiento*, las *cuadernas* y los *larguerillos*; las cuadernas que se extienden totalmente en una sección transversal se denominan *mamparos*. En las figuras 4.1, 4.2 y 4.3 se muestran tres tipos diferentes de fuselajes. El de la figura 4.1 corresponde a un avión no presurizado, de modo que el área de pasajeros tiene una sección transversal rectangular a fín de maximizar el espacio disponible. El fuselaje del *Harrier* de la figura 4.2 contiene el motor, los tanques de combustible, etc., lo cual determina la forma de su sección transversal. En la figura 4.3 se muestra el fuselaje típico de un avión de pasajeros presurizado y, por consiguiente, con sección transversal circular.

Capítulo 5

Fabricación de los componentes del avión

La aparición de los aviones de revestimiento resistente fabricados totalmente de metal dio lugar a procedimientos de fabricación que se siguen utilizando hasta los días actuales. Sin embargo, los avances logrados en los motores aeronáuticos, así como en el conocimiento de los fenómenos aerodinámicos, han permitido conseguir cada vez mayores fuerzas de sustentación y velocidades más altas, lo que ha dado lugar a incrementos enormes de las cargas existentes en las alas, que han pasado de ser de unos 350 N/m^2 en los aviones de 1917-1918 a unos 4800 N/m^2 en los aviones actuales. Esto ha obligado a desarrollar mejores técnicas de fabricación, particularmente en la construcción de alas. El aumento de las cargas en las alas ha ido acompañado por una caída en el porcentaje que supone el peso de la estructura en el peso total del avión, que ha pasado de ser un 30-40% a primeros de siglo a un 22-25% en la actualidad. Todo ésto da una idea de los avances logrados en los materiales y en el diseño estructural en tan corto espacio de tiempo.

En la actualidad, a la hora de construir un avión, éste se suele dividir en subconjuntos, cada uno de los cuales es fabricado en gradas especialmente diseñadas y que posiblemente estén situadas en diferentes partes de la fábrica o incluso en fábricas distintas. Una vez fabricados los diferentes subconjuntos, son transportados a la línea final de montaje para su ensamblaje. En la figura 5.1 se muestra lo que podría ser la división típica en subconjuntos de un avión civil de tamaño medio. Cada subconjunto está formado a su vez por componentes menores, tales como largueros, costillas, cuadernas, etc., y éstos a su vez están compuestos por elementos más simples.

5.1 Alas y superficies aerodinámicas

Aunque las alas, y en general todas las superficies aerodinámicas, de todos los aviones de ala fija constan de revestimiento, largueros, costillas y larguerillos, los métodos de fabricación y ensamblaje son diferentes de un avión a otro. En la construcción del ala del avión de la figura 4.1 (página 48) se han utilizado técnicas de fabricación que han sido empleadas durante muchos años:

El primer paso en la construcción de este tipo de alas consistiría en el montaje de los largueros, que son prácticamente continuos a lo largo de toda la envergadura

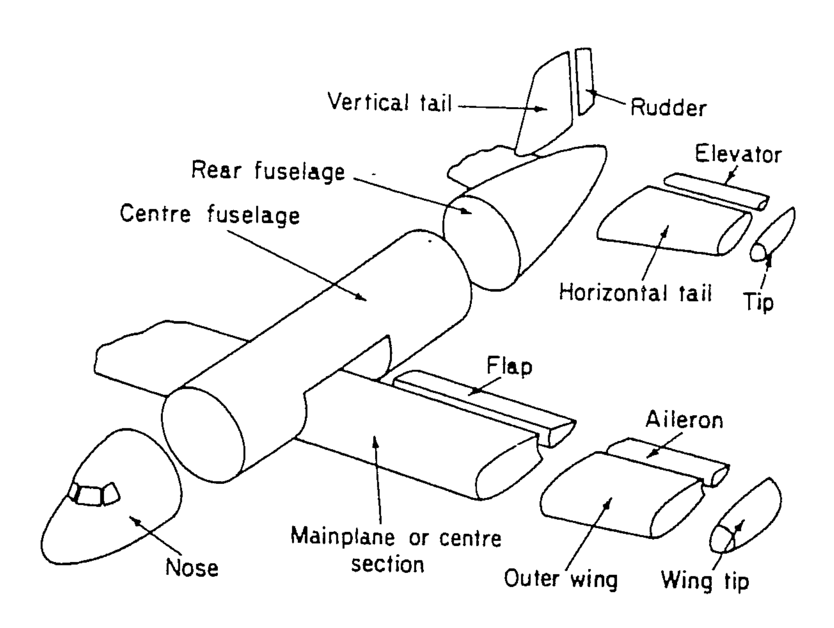


Figura 5.1: División típica en subconjuntos en la fabricación de un avión

del ala. Los largueros están fabricados en aleaciones de aluminio y están compuestos por una chapa de relativamente poco espesor que constituye el alma, y unos perfiles extruídos o mecanizados que constituyen los cordones, los cuales son remachados al alma. Si la separación entre costillas es grande, se suele reforzar el alma de los largueros por medio de elementos verticales o montantes (ver figura 5.2).

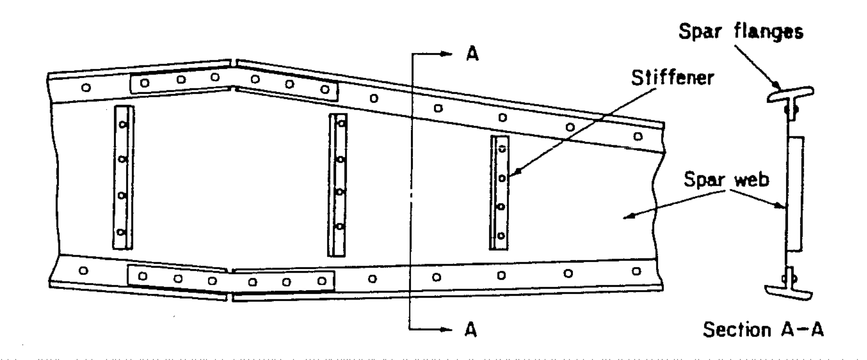


Figura 5.2: Disposición típica de un larguero

Dado que las almas de los largueros son continuas, las costillas estarán compuestas por una serie de elementos alineados que dejan paso a aquellas. En la figura 5.3 se muestra una disposición típica de una costilla. Si las costillas no se encuentran sometidas a grandes cargas, se fabrican con chapas metálicas a las que se les da las formas adecuadas mediante grandes prensas o estampas. Sin embargo, si las costillas han de soportar y transmitir grandes cargas concentradas, es preferible fabricarlas por medio de chapas a las que se les remachan los refuerzos verticales necesarios para que se realice eficazmente la transferencia de cargas. En las zonas de las costillas en que los esfuerzos son bajos, se suelen realizar aberturas con el fín de aligerar peso

y de permitir el paso de los sistemas eléctricos, de combustible, etc. a lo largo del ala. Asímismo, en los bordes de las costillas se practican aberturas para permitir el paso de los larguerillos del revestimiento.

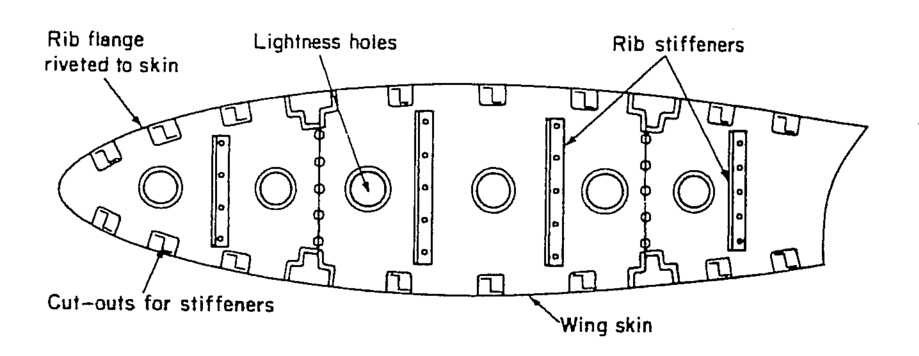


Figura 5.3: Disposición típica de una costilla

Una vez fabricada la costilla, es remachada al alma de los largueros, y, posteriormente, los larguerillos son unidos a las costillas. Finalmente, el revestimiento es remachado a las alas de las costillas y a los larguerillos. Las chapas de aquellas zonas en las que la curvatura es grande, por ejemplo en el borde de ataque, son pasadas a través de grandes rodillos para darles una forma adecuada antes de montarlas. Con el fin de retrasar el paso del flujo laminar al turbulento, la parte delantera de las secciones transversales de ala ha de ser tan suave como sea posible. Por ello, en estas zonas se utilizan remaches de cabeza avellanada, mientras que en las zonas próximas al borde de salida se utilizan con más frecuencia los remaches de cabeza protuberante.

Las alas son unidas al fuselaje a través de cuadernas reforzadas. En algunos aviones, si la demanda de espacio lo permite, los largueros de las alas son continuos a través del fuselaje. Obviamente, la disposición ideal es aquella en que se mantiene la continuidad estructural en toda la superficie del ala. Sin embargo, en la mayoría de los casos prácticos ésto no es posible de conseguir dado que es necesario practicar aberturas en la superficie del ala para el tren de aterrizaje, los agarres de las armas, los paneles de inspección, etc. Estos últimos suelen estar situados en la parte inferior de la superficie y están unidos a los larguerillos y a las alas de las costillas por medio de tornillos, de modo que son capaces de resistir cargas de cortadura. Por el contrario, las puertas de cierre de los compartimentos del tren de aterrizaje o de las armas no suelen ser capaces de resistir los esfuerzos del ala, de modo que será necesario proveer los refuerzos adecuados para transferir dichos esfuerzos alrededor de las aberturas. Esto se puede conseguir insertando fuertes mamparos o aumentando las áreas de los cordones de los largueros, lo cual, con independencia del método empleado, da lugar a un aumento de peso y de coste.

No hay un procedimiento único de fabricación de alas, sino que, dependiendo de la función para la que se destine el avión, los requerimientos estructurales son diferentes y, en consecuencia, también son distintas las técnicas de fabricación utilizadas. Por ejemplo, en los aviones de alta velocidad las alas han de tener secciones

transversales relativamente delgadas y han de soportar grandes cargas, lo cual da lugar a que el espesor del revestimiento utilizado tenga que ser relativamente grueso. Por ello, en estos aviones se suelen utilizar revestimientos integrales obtenidos mediante el mecanizado de grandes tochos de material. Este método de fabricación integral no implica nuevos principios de diseño y presenta las ventajas de combinar un alto grado de acabado, libre de irregularidades, con una utilización más eficiente del material, ya que se pueden reducir fácilmente los espesores del revestimiento y las áreas de los larguerillos a medida que disminuyen las cargas a lo largo de la envergadura del ala. Esto da lugar a que los paneles de revestimiento situados en las proximidades de las puntas de las alas sean de muy poco espesor; para evitar que se produzca el pandeo de los mismos, es frecuente utilizar una estructura sandwich en estas zonas.

5.2 Fuselajes

Los principios generales relativos a la fabricación de alas son aplicables a los fuselajes con la excepción de que en éstos no se utilizan los paneles integrales por razones obvias. Las figuras 4.1, 4.2 y 4.3 (páginas 48, 49 y 52, respectivamente) muestran que básicamente el procedimiento utilizado para la fabricación de un fuselaje es siempre el mismo, independientemente de la función para la que se destine el avión. El proceso de montaje es ligeramente diferente del de las alas ya que el fuselaje es un tubo unicelular en el que no existen los largueros.

El primer paso consiste en la fabricación de las cuadernas, cuyas formas vienen determinadas por su posición en el fuselaje y por la función que desempeñan. Así, las cuadernas que soportan grandes cargas concentradas, procedentes del suelo o de los puntos de unión de las alas o del estabilizador, son más pesadas que las demás, y necesitan ser reforzadas por medio de elementos que transmitan las cargas concentradas a las cuadernas y de ellas al revestimiento.

Una vez situadas las cuadernas en su posición en la grada del fuselaje, se remachan a sus alas los larguerillos. En muchos casos, estos larguerillos pasan a través de aberturas practicadas en las cuadernas, pero en los aviones modernos, en los que la presurización y el resto de las cargas actuantes dan lugar a grandes esfuerzos, se utilizan cuadernas de secciones muy pesadas a las que se les remachan los larguerillos en su periferia.

Posteriormente se colocan en su posición y son remachadas otras cuadernas auxiliares, como las de puerta o ventana, y finalmente se remacha el revestimiento a las cuadernas. Las áreas del fuselaje próximas a las aberturas han de reforzarse por medio de elementos longitudinales y transversales adicionales así como han de tener un mayor espesor de revestimiento, a fín de poder soportar los grandes esfuerzos normales y flujos de cortadura existentes en estas zonas.

5.3 Ensamblaje final

Una vez construídos los diferentes subconjuntos, son llevados a la línea final de montaje para su ensamblaje final. Las diferentes secciones del fuselaje son unidas entre sí por medio de remaches o pernos a lo largo de todo su perímetro mientras

que las alas y los estabilizadores son unidos a los puntos de cogida en las cuadernas seleccionadas.

En los aviones civiles de alas bajas los largueros de las alas son normalmente pasantes a través del fuselaje, lo cual simplifica el diseño del ala y los métodos de unión al fuselaje. En los aviones civiles más pequeños que llevan las alas más altas no es posible adoptar esta disposición, ya que da lugar a problemas de interferencia con otros elementos. Asímismo, en los aviones militares, las instalaciones del motor impiden que los largueros sean pasantes. En estos casos, los largueros se unen a las cuadernas del fuselaje diseñadas para ello, siendo necesario reforzar no sólo estas cuadernas, sino también los larguerillos y el revestimiento de estas zonas.

Parte II

ANALISIS DE ESFUERZOS

Capítulo 6

Idealización estructural

Como se ha visto en los Capítulos anteriores, las estructuras aeronáuticas suelen estar compuestas por un revestimiento de chapa delgada reforzado con elementos longitudinales y transversales. Esto da lugar a que estas estructuras sean hiperestáticas, con un grado de hiperestaticidad bastante alto, por lo que su análisis suele ser bastante complejo.

Una diferencia importante entre las estructuras isostáticas e hiperestáticas es que mientras que en las primeras existen los elementos justos para que la estructura no sea un mecanismo, de modo que si se elimina o falla un elemento se producirá el colapso de toda la estructura, las estructuras hiperestáticas tienen más elementos de los necesarios para mantener la estabilidad estática, por lo que se puede producir el fallo de algún elemento sin que tenga lugar el colapso de toda la estructura. En otras palabras, las estructuras hiperestáticas tienen una característica de *seguridad al fallo*, de modo que si un elemento falla se produce una redistribución de esfuerzos entre el resto de los elementos que componen la estructura. En general, las estructuras hiperestáticas dan lugar a diseños de menor peso y mayor rigidez que las estructuras isostáticas.

6.1 Métodos de análisis

El análisis de una estructura hiperestática es mucho más complejo que el de una estructura isostática. En efecto, mientras que en una estructura isostática se pueden obtener las cargas internas aplicando exclusivamente las ecuaciones de equilibrio estático, en una estructura hiperestática son necesarias ecuaciones adicionales para poder obtener dichas cargas internas. Estas ecuaciones se obtienen haciendo consideraciones de deformaciones de la estructura, por lo que es necesario conocer las dimensiones y el material de los diferentes elementos que la componen a fín de poder analizarla.

Básicamente, existen tres métodos para analizar una típica estructura aeronáutica:

1. Aplicar la *teoría de vigas en flexión*, realizando hipótesis simplificativas.
2. Considerar como incógnitas las fuerzas redundantes, y obtener ecuaciones que liguen dichas incógnitas aplicando los *principios de la teoría elástica*, tales como el principio de los trabajos virtuales, el de la energía de deformación, etc.

3. Aplicar las técnicas basadas en el empleo del ordenador, tales como los *elementos finitos*.

Los dos últimos métodos permiten analizar la estructura con un alto grado de precisión, pero en la práctica son inabordables sin la ayuda de un ordenador.

El primer método de los citados anteriormente es el menos preciso ya que en él se realizan una serie de hipótesis simplificativas que dan lugar a que en el análisis no se tengan en cuenta todos los fenómenos presentes en la realidad, de modo que los resultados obtenidos serán tanto menos exactos cuanto mayor sea el número de hipótesis realizadas. Sin embargo, este procedimiento presenta las siguientes ventajas:

- Se trabaja con una *estructura idealizada* que es mucho más simple que la real y que, por consiguiente, puede ser analizada de una forma mucho más rápida, lo cual es especialmente útil en las etapas preliminares de diseño, en las que se están considerando diferentes alternativas posibles.
- Permite obtener una idea del *comportamiento físico* de la estructura, cosa que se pierde con los métodos basados en el empleo del ordenador.

En los siguientes Capítulos de esta Parte se aplicará la *teoría de vigas en flexión* para obtener los esfuerzos normales y de cortadura existentes en los diferentes elementos que componen las alas y el fuselaje de un avión. En esta teoría se hacen dos hipótesis principales:

1. *Las secciones transversales de la viga que inicialmente eran planas permanecen planas después de la flexión.* Esto quiere decir que las deformaciones longitudinales de los diferentes puntos de la sección transversal tienen una distribución lineal, siendo proporcionales a la distancia del punto al eje neutro de la sección.
2. *El esfuerzo normal existente en cada punto de la sección transversal de la viga es proporcional a la deformación longitudinal que tiene lugar en dicho punto.* Según esta hipótesis, y teniendo en cuenta la anterior, los esfuerzos normales siguen también una ley lineal, siendo asímismo proporcionales a la distancia al eje neutro de la sección.

La hipótesis primera ignora las deformaciones debidas a los esfuerzos de cortadura existentes en el revestimiento, cuya influencia es conocida como el *efecto del retardo en cortadura* (*"shear lag"*). Este efecto no suele ser importante salvo en las zonas próximas a las aberturas o a otras discontinuidades importantes*, así como a los puntos de aplicación de grandes cargas concentradas. *→ el encastre del ala por ej

La segunda hipótesis no es cierta si se produce el pandeo del revestimiento o de los larguerillos antes de que tenga lugar el fallo de la estructura. Asímismo, esta hipótesis supone que el material es perfectamente elástico, lo cual no es correcto si las deformaciones alcanzadas son suficientes para que el material entre en la zona plástica. Por ello, para poder aplicar esta teoría en estos casos, será necesario introducir algunas correcciones a la misma. En los Capítulos siguientes se indicará qué tipo de correcciones es necesario aplicar.

3. Aplicar las técnicas basadas en el empleo del ordenador, tales como los *elementos finitos*.

Los dos últimos métodos permiten analizar la estructura con un alto grado de precisión, pero en la práctica son inabordables sin la ayuda de un ordenador.

El primer método de los citados anteriormente es el menos preciso ya que en él se realizan una serie de hipótesis simplificativas que dan lugar a que en el análisis no se tengan en cuenta todos los fenómenos presentes en la realidad, de modo que los resultados obtenidos serán tanto menos exactos cuanto mayor sea el número de hipótesis realizadas. Sin embargo, este procedimiento presenta las siguientes ventajas:

- Se trabaja con una *estructura idealizada* que es mucho más simple que la real y que, por consiguiente, puede ser analizada de una forma mucho más rápida, lo cual es especialmente útil en las etapas preliminares de diseño, en las que se están considerando diferentes alternativas posibles.
- Permite obtener una idea del *comportamiento físico* de la estructura, cosa que se pierde con los métodos basados en el empleo del ordenador.

En los siguientes Capítulos de esta Parte se aplicará la *teoría de vigas en flexión* para obtener los esfuerzos normales y de cortadura existentes en los diferentes elementos que componen las alas y el fuselaje de un avión. En esta teoría se hacen dos hipótesis principales:

1. *Las secciones transversales de la viga que inicialmente eran planas permanecen planas después de la flexión.* Esto quiere decir que las deformaciones longitudinales de los diferentes puntos de la sección transversal tienen una distribución lineal, siendo proporcionales a la distancia del punto al eje neutro de la sección.
2. *El esfuerzo normal existente en cada punto de la sección transversal de la viga es proporcional a la deformación longitudinal que tiene lugar en dicho punto.* Según esta hipótesis, y teniendo en cuenta la anterior, los esfuerzos normales siguen también una ley lineal, siendo asímismo proporcionales a la distancia al eje neutro de la sección.

La hipótesis primera ignora las deformaciones debidas a los esfuerzos de cortadura existentes en el revestimiento, cuya influencia es conocida como el *efecto del retardo en cortadura* (*"shear lag"*). Este efecto no suele ser importante salvo en las zonas próximas a las aberturas o a otras discontinuidades importantes, así como a los puntos de aplicación de grandes cargas concentradas.

La segunda hipótesis no es cierta si se produce el pandeo del revestimiento o de los larguerillos antes de que tenga lugar el fallo de la estructura. Asímismo, esta hipótesis supone que el material es perfectamente elástico, lo cual no es correcto si las deformaciones alcanzadas son suficientes para que el material entre en la zona plástica. Por ello, para poder aplicar esta teoría en estos casos, será necesario introducir algunas correcciones a la misma. En los Capítulos siguientes se indicará qué tipo de correcciones es necesario aplicar.

6.2 Idealización estructural

Para poder aplicar la teoría de vigas en flexión para analizar la estructura de un ala o un fuselaje, es necesario *idealizar* las secciones estructurales, que son muy complejas, a fín de obtener un modelo mecánico más simple que se comporte, bajo la acción de las cargas aplicadas, de forma similar a la estructura real.

Así por ejemplo, en la sección de ala mostrada en la figura 6.1 las dimensiones de los larguerillos y de los cordones de los largueros son pequeñas en comparación con las de la sección completa. En consecuencia, en un caso de flexión sobre el ala la variación de esfuerzos en la sección transversal de un larguerillo será muy pequeña, por lo que sería razonable asumir que dichos esfuerzos son constantes. Por otra parte, las distancias existentes entre los centros de gravedad de los larguerillos y la línea media del revestimiento son pequeñas en comparación con la distancia desde cualquiera de ellos al centro de gravedad de la sección completa. Por todo ello, se podrían reemplazar los larguerillos y los cordones de los largueros por unas áreas concentradas, normalmente denominadas *booms*, que estarían situadas a lo largo de la línea media del revestimiento y en las que son constantes los esfuerzos normales. Por otra parte, las distancias entre los larguerillos suelen ser tan pequeñas que se puede suponer que el flujo de cortadura existente en los paneles del revestimiento se mantiene constante entre larguerillos, variando únicamente al pasar de un panel a otro a través de un larguerillo.

De esta forma, la sección real del ala mostrada en la figura 6.1 se sustituye por la sección idealizada de la figura 6.2, en la que los esfuerzos normales son soportados principalmente por los larguerillos y los cordones de los largueros, mientras que los esfuerzos de cortadura son resistidos por los paneles del revestimiento. No obstante, el revestimiento también contribuye a soportar los esfuerzos normales, aunque su eficiencia es distinta según que esté trabajando a tracción o a compresión, ya que en éste último caso, por ser normalmente de poco espesor, suele pandear a unos esfuerzos bastante bajos. Para tener en cuenta la capacidad del revestimiento para resistir esfuerzos normales, lo que se suele hacer es aumentar el área de los *booms* en una cantidad equivalente a dicha capacidad. El cálculo de estas áreas dependerá de las hipótesis iniciales y de la forma de la distribución de los esfuerzos normales en el revestimiento, siendo en general mayores si los esfuerzos son de tracción que si son de compresión.

En realidad, será necesario realizar diferentes modelos de la misma estructura, dependiendo de los sistemas de cargas que se estén analizando, ya que el comportamiento de la estructura real será diferente en unos casos y en otros. Ya se ha mencionado el comportamiento diferente que tiene el revestimiento según que esté trabajando a tracción o a compresión, siendo por tanto diferentes las áreas equivalentes que hay que considerar. Pero es que incluso en el caso de que el revestimiento esté traccionado, habría que considerar diferentes áreas equivalentes para el mismo, dependiendo del tipo de carga que actúe sobre él.

Sea por ejemplo el panel representado en la figura 6.3, el cual se desea idealizar en un modelo en el que los esfuerzos normales sean soportados por los *booms* y los de cortadura por el panel. Sobre el panel actúa una distribución de esfuerzos normales que varía linealmente desde un valor σ_1 a otro σ_2. En el panel real, todo el espesor tiene capacidad para resistir esfuerzos normales, ya que está trabajando a tracción;

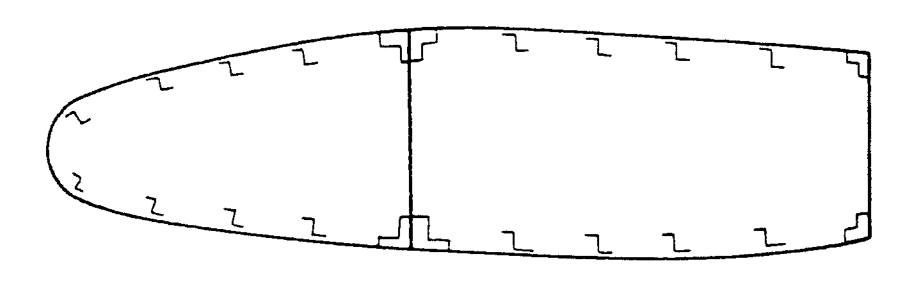


Figura 6.1: Sección transversal de un ala

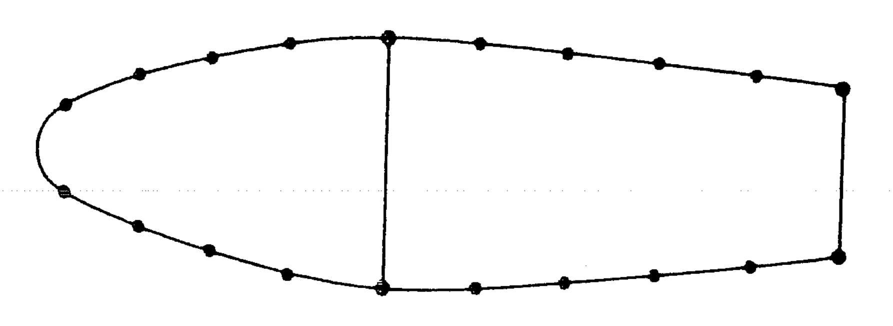


Figura 6.2: Sección idealizada de un ala

en el panel idealizado se sustituirá esta capacidad por unas áreas concentradas en los *booms*, de valor B_1 y B_2, trabajando cada una a un esfuerzo σ_1 y σ_2, respectivamente. Los valores de los esfuerzos σ_1 y σ_2 son en principio desconocidos. Una vez realizado el análisis de la estructura, se podrán conocer los valores de estos esfuerzos. Sin embargo, antes de realizar el análisis será necesario conocer las áreas de los *booms* a fín de poder idealizar la estructura. Para obtener estas áreas se igualarán los momentos de las fuerzas que actúan sobre las estructuras real e idealizada, ya que ambos sistemas de fuerzas han de ser equivalentes por estar producidos por las mismas cargas. Así pues, tomando momentos respecto al *boom* 2:

$$\frac{\sigma_2 t b^2}{2} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) t b^2}{3} = \sigma_1 B_1 b$$

Despejando B_1, se obtiene:

$$B_1 = \frac{bt}{6}\left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)$$

Y de forma similar, tomando momentos respecto al *boom* 1, queda:

$$B_2 = \frac{bt}{6}\left(2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)$$

En las expresiones anteriores, las relaciones entre σ_1 y σ_2 no son conocidas, pero pueden ser asumidas frecuentemente. Así, por ejemplo, si el panel está sometido a cargas axiales exclusivamente:

$$\sigma_1 = \sigma_2$$

$$B_1 = B_2 = \frac{bt}{2}$$ ← carga axial (sólo tensión o sólo compresión)

Y si el panel está sometido a flexión pura:

$$\sigma_1 = -\sigma_2$$

$$B_1 = B_2 = \frac{bt}{6}$$ ← flexión (como por ejemplo ocurrirá con el ala del larguero

Si el panel estuviera sometido a una combinación de tracción y flexión sería necesario asumir un valor para las relaciones entre σ_1 y σ_2 y posteriormente comprobar que el valor asumido es correcto.

Este ejemplo ha servido para mostrar cómo es necesario realizar diferentes idealizaciones de la misma estructura dependiendo del tipo de cargas que se vayan a considerar.

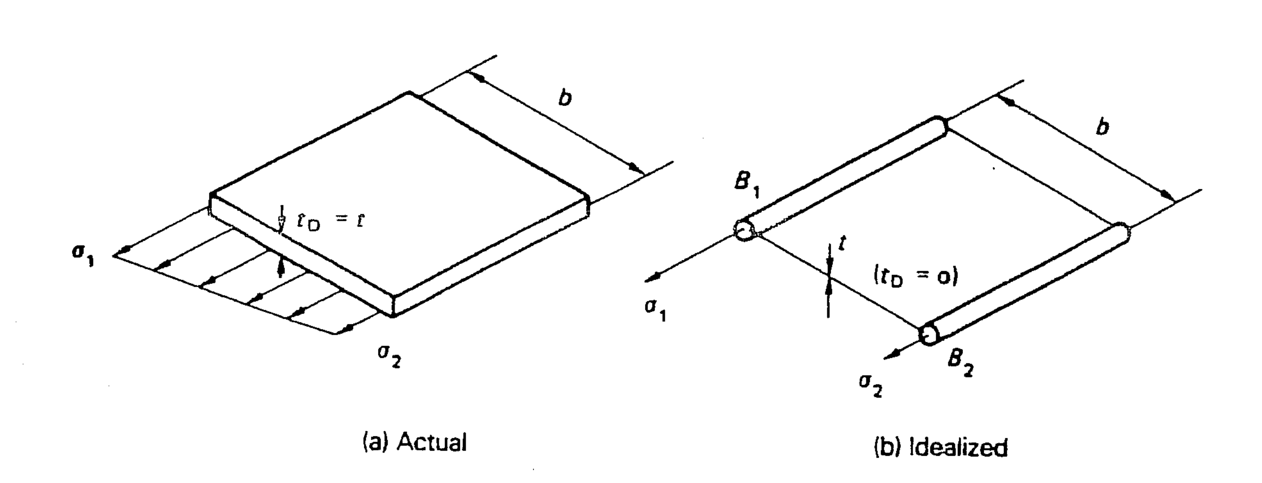


Figura 6.3: Idealizacón de un panel traccionado

Capítulo 7

Análisis de esfuerzos en alas

Como se ha indicado en la Parte I, el tipo más común de construcción de alas es el constituído por un revestimiento reforzado por múltiples larguerillos y cerrado por varios largueros, constituyendo así un cajón uni o multicelular (ver figura 7.1). Este tipo de estructura es hiperestático, con un grado de hiperestaticidad muy alto. Sin embargo, los ensayos estructurales muestran un buen acuerdo con los resultados obtenidos aplicando la teoría de vigas en flexión, siempre y cuando se cumpla que:

- la envergadura del ala sea bastante grande en comparación con la cuerda de su sección transversal
- la flecha del ala sea despreciable
- no existan aberturas o discontinuidades de importancia en el ala

Por lo tanto, a nivel de diseño se puede realizar el análisis general de esfuerzos en el ala utilizando la teoría de vigas en flexión, e investigar posteriormente por medio de procedimientos más exactos aquellas partes del ala en donde esta teoría pueda dar lugar a errores apreciables.

En este Capítulo se incluyen los procedimientos de análisis del ala trabajando como viga. El estudio de estos otros problemas adicionales se realizará en otra parte del Curso.

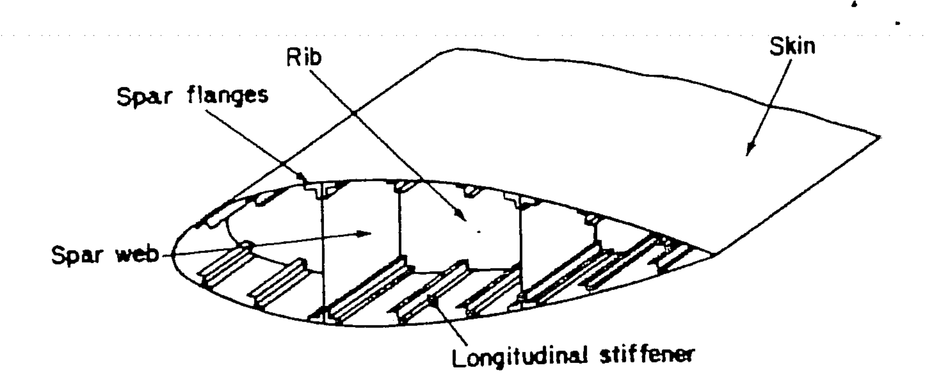


Figura 7.1: Sección transversal típica de un ala

El procedimiento general consistirá en analizar varias secciones del ala situadas en diferentes posiciones a lo largo de la envergadura. Para ello, se seguirán los siguientes pasos:

1. Se hará una idealización estructural de cada sección, obteniéndose un modelo más simple y fácil de analizar, pero que tenga un comportamiento similar al de la estructura real.

2. Se realizará el análisis de esfuerzos de cada sección, obteniéndose los esfuerzos axiales en los *booms* y de cortadura en el revestimiento y almas de los largueros.

A continuación se desarrollará con detalle cada uno de estos pasos. Pero previamente se describirá el fenómeno físico que tiene lugar cuando la estructura se somete a unas cargas que van aumentando hasta que se produce el fallo de la misma. Es importante tener bien claro el comportamiento real de la estructura a fín de realizar una idealización estructural de la misma que represente lo más fielmente posible dicho comportamiento.

7.1 Comportamiento físico de la estructura

7.1.1 Cargas axiales y de flexión

La figura 7.1 muestra una disposición general típica de la estructura de la sección transversal de un ala. Los cordones de los largueros suelen tener un área bastante mayor que los larguerillos, y el revestimiento suele ser relativamente delgado.

Debido a la acción combinada de las cargas axiales y de flexión a que está sometida el ala en esta sección, una parte del revestimiento, por ejemplo la inferior, estará trabajando a tracción, mientras que la otra lo estará a compresión.

Si las cargas son pequeñas, los esfuerzos normales en el revestimiento serán también pequeños, siendo proporcionales a las deformaciones longitudinales que tienen lugar en la sección, y presentando por consiguiente una distribución lineal con un valor en cada elemento proporcional a la distancia del elemento al eje neutro de la sección. A medida que van aumentando las cargas aplicadas, se van haciendo mayores los esfuerzos normales en la estructura, llegando un momento en que se produce el pandeo de los paneles del revestimiento que está sometido a compresión. Una vez que han pandeado los paneles, disminuye su rigidez, de forma que no son capaces de resistir esfuerzos mayores aún cuando las deformaciones longitudinales de los mismos sigan aumentando. O dicho de otra forma, los esfuerzos normales ya no son proporcionales a las deformaciones longitudinales y no presentan una distribución lineal.

El pandeo de los paneles del revestimiento sometidos a compresión no supone el colapso de la estructura, ya que los larguerillos y los cordones de los largueros están trabajando en este momento a unos esfuerzos normales muy inferiores a sus respectivos esfuerzos de fallo. Los larguerillos están apoyados en las costillas, por lo que trabajan como columnas, siendo su esfuerzo de fallo el correspondiente al *pandeo como columna*. Por el contrario, los cordones de los largueros están estabilizados en las dos direcciones por el revestimiento y las almas de los largueros, previniendo el pandeo de los mismos, por lo que su fallo se debe al *crippling* de su sección.

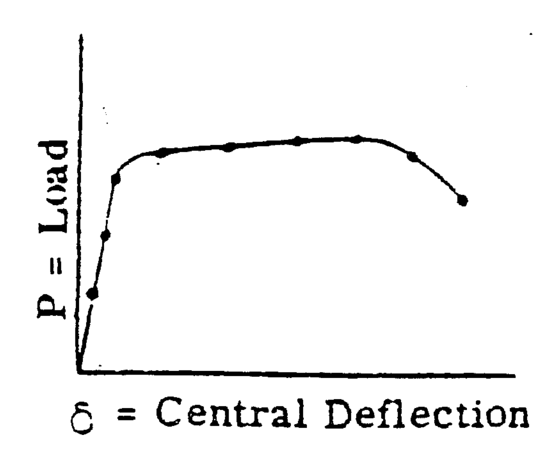


Figura 7.2: Pandeo elástico a flexión de una columna

Si, una vez que se ha producido el pandeo del revestimiento que está a compresión, continúa aumentando la carga, ésta se concentrará en los larguerillos y en los cordones de los largueros. Dado que la resistencia de los larguerillos es menor que la de los cordones de los largueros, llegará un momento en que se producirá el pandeo como columna de aquellos, no siendo capaces de coger más carga a partir de entonces. Pero los cordones de los largueros aún tienen capacidad resistente puesto que no se habrá alcanzado su esfuerzo de fallo, concentrándose en ellos los posteriores incrementos de carga. Las cargas exteriores pueden seguir aumentando hasta que los esfuerzos en los cordones alcancen los admisibles de *crippling*, momento en que se producirá el colapso de la estructura.

En la descripción anterior se considera que los larguerillos son capaces de seguir soportando su carga de pandeo al aumentar considerablemente las deformaciones longitudinales. Esto se verifica experimentalmente por medio de ensayos de columnas. En la figura 7.2 se representan en abscisas las deflexiones laterales del punto medio de una columna cargada a compresión, y en ordenadas los valores de la carga, cuando la columna falla por pandeo elástico a flexión. Estos ensayos muestran que un elemento a compresión que falla por pandeo a flexión continúa llevando aproximadamente la misma carga máxima para un aumento considerable de las deformaciones longitudinales. Como consecuencia de ésto, se deduce que cuando los larguerillos del ala alcanzan su carga máxima retienen su capacidad de poder resistir dicha carga, no descargándola sobre los cordones de los largueros.

Por otra parte, incluso para los elementos en tracción puede llegar un momento en que los esfuerzos normales dejen de ser proporcionales a las deformaciones longitudinales: cuando se supere el límite de proporcionalidad del material de que están hechos.

Con esta descripción, se ha visto claramente que los esfuerzos normales no son proporcionales a las deformaciones longitudinales, ni en consecuencia presentan una distribución lineal, durante todo el proceso de carga hasta el colapso de la estructura. Sin embargo, la teoría de vigas en flexión no tiene en cuenta estos efectos no lineales, por lo que es necesario hacer algunas modificaciones en las propiedades de la sección transversal del ala y trabajar con una *sección efectiva*, si se desea analizar su resistencia última con un cierto grado de exactitud.

7.1.2 Cargas de cortadura y de torsión

Generalmente, no se tiene en cuenta la resistencia de los largueríllos ante las fuerzas de cortadura y de torsión, considerándose que éstas son resistidas únicamente por el revestimiento y las almas de los largueros. Por otro lado, la distancia entre los largueríllos suele ser pequeña, por lo que la variación del flujo de cortadura que tiene lugar en los paneles entre largueríllos suele ser también pequeña, pudiendo considerarse que dicho flujo permanece constante en el panel, variando únicamente al pasar de un panel a otro.

7.2 Idealización estructural de las secciones transversales

Teniendo en cuenta el comportamiento físico de la estructura descrito en el Apartado anterior, se puede idealizar una sección transversal de ala por un modelo constituído por una serie de *booms*, en donde se concentra la capacidad resistente de la sección ante cargas axiales y de flexión, y por un revestimiento que resiste las cargas de cortadura y de torsión. El área de cada *boom* estará formada por el área del larguerillo o cordón de larguero más un área efectiva de revestimiento determinada por la capacidad resistente del mismo ante las cargas axiales o de flexión. Los *booms* se pueden situar en la línea media del revestimiento, o bien, más exactamente, a una distancia de dicha línea media determinada por la posición del centro de gravedad del conjunto formado por el larguerillo y la sección efectiva de revestimiento asociada a él. De este modo, la sección efectiva para cargas axiales y de flexión estará constituída por los *booms*, y el revestimiento existente entre ellos será el encargado de soportar las cargas de cortadura y de torsión.

Dado que la efectividad de los elementos ante cargas normales es distinta según que éstas sean de tracción o de compresión, el área efectiva de cada *boom* se determinará de una forma u otra en cada caso.

7.2.1 Area efectiva del revestimiento en tracción

Los elementos del revestimiento que está en tracción son totalmente efectivos. Dado que las distancias entre largueríllos suelen ser bastante pequeñas, los esfuerzos normales existentes en dos largueríllos adyacentes serán prácticamente iguales, por lo que el área efectiva de cada *boom* se determinará sumando el área del larguerillo y las semiáreas de los paneles adyacentes a él:

$$A_b = A_l + \frac{b_1 t_1 + b_2 t_2}{2}$$

Si los esfuerzos obtenidos en los *booms* superan el límite de proporcionalidad del material, dejarán de ser proporcionales a las deformaciones. Para poder utilizar la teoría de vigas en flexión, que supone que dicha proporcionalidad se mantiene indefinidamente, se ha de corregir el área de los *booms* multiplicándola por un factor de efectividad c. Si la deformación existente en un larguerillo tiene un valor ε, el esfuerzo correspondiente aplicando la teoría de vigas en flexión será $\sigma_l = E\varepsilon$,

siendo E el módulo elástico del material. Si para esta deformación longitudinal ya se hubiera superado el límite de proporcionalidad del material, el esfuerzo real existente en el *boom* tendrá un valor σ_r obtenido de la curva de esfuerzos-deformaciones del material en tracción, el cual es menor que σ_l. Para tener en cuenta este efecto, se supondrá que el larguerillo tiene un área efectiva cA_b tal que:

$$cA_b\sigma_l = A_b\sigma_r$$

Area efectiva larguerillo para tracción $\equiv$

$$cA_b = \frac{\sigma_r}{\sigma_l}A_b$$

$\left(A_b = A_l + \frac{b_1 t_1 + b_2 t_2}{2}\right)$

$$c = \frac{\sigma_r}{\sigma_l}$$

7.2.2 Area efectiva del revestimiento en compresión

A fín de poder utilizar la teoría de vigas en flexión, que supone una variación lineal de esfuerzos y deformaciones, es necesario hacer algunas correcciones para tener en cuenta los efectos del pandeo de los paneles del revestimiento y de los larguerillos.

Efecto del pandeo de los paneles

Si las cargas aplicadas no son suficientemente grandes como para que los esfuerzos de compresión existentes en el revestimiento produzcan el pandeo de los paneles del mismo, todo el revestimiento será efectivo, siendo los esfuerzos normales en él proporcionales a las deformaciones longitudinales, o lo que es lo mismo, a la distancia al eje neutro de la sección. Esto es, los esfuerzos normales en el revestimiento no pandeado presentan una distribución lineal[1].

Si al aumentar las cargas aplicadas se produce el pandeo de los paneles del revestimiento, éstos pierden capacidad resistente, de modo que, si bien el esfuerzo existente en la línea de unión con los larguerillos es el mismo que en éstos[2], entre larguerillos el esfuerzo disminuye tal y como se indica en la figura 7.3. Trabajar con una distribución de esfuerzos de este tipo es bastante complicado, por lo que en la práctica lo que se suele hacer es sustituir el revestimiento con sus esfuerzos variables por un ancho de *chapa efectiva* sobre la que actúa un esfuerzo constante e igual al del larguerillo, de modo que sobre el resto del panel no actúe ningún esfuerzo. Es decir, se sustituye la distribución real de esfuerzos en el revestimiento por la distribución simplificada mostrada en la figura 7.4.

---

[1] No se considera el hecho de que las deformaciones longitudinales que se producen sean tan grandes que se entre en la zona plástica de la curva de esfuerzos-deformaciones del material. Esto sólo ocurrirá para espesores de revestimiento muy grandes.

[2] Esto es cierto si el revestimiento es del mismo material que los larguerillos. Si no fuera así, por compatibilidad de deformaciones, los esfuerzos en uno y otros estarían en la misma proporción que los módulos secantes de los materiales correspondientes a la deformación longitudinal que tiene lugar.

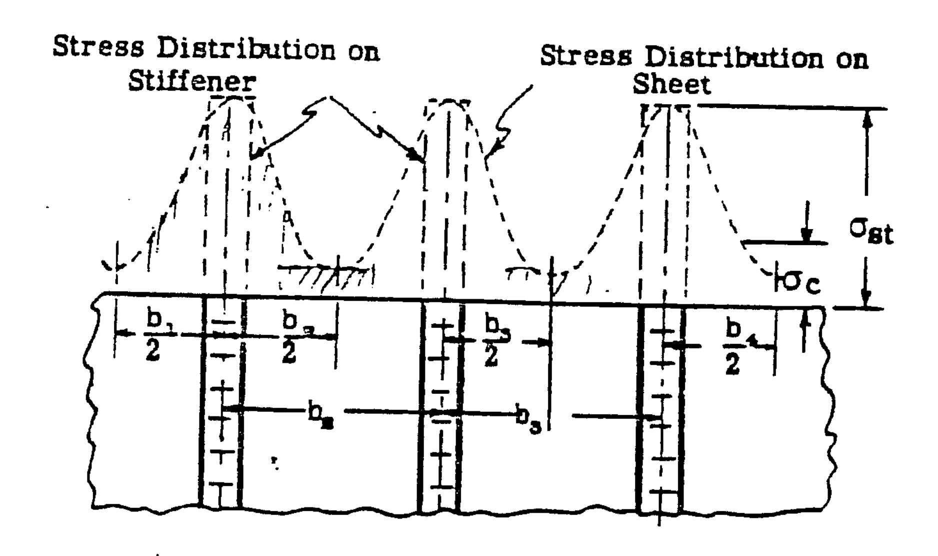


Figura 7.3: Distribución real de esfuerzos de compresión

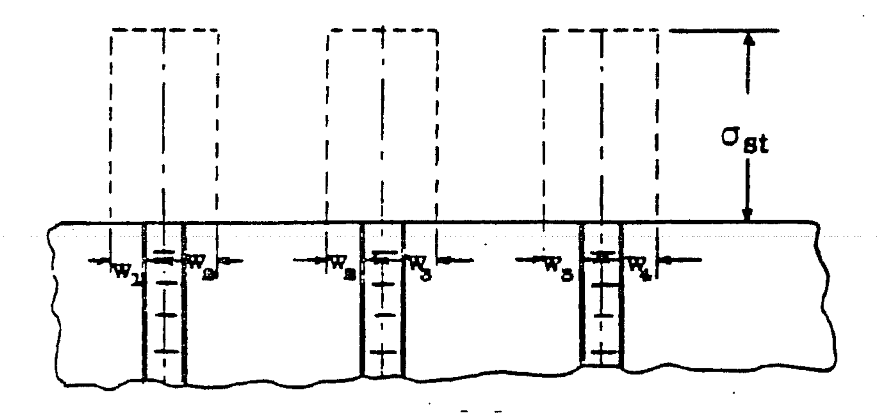


Figura 7.4: Distribución simplificada de esfuerzos de compresión

El ancho de chapa efectiva se determina calculando el ancho de un panel infinitamente largo y simplemente apoyado que pandea para un esfuerzo igual al existente en el larguerillo:

$$\sigma_{st} = \frac{4\pi^2 E}{12\left(1-\mu^2\right)}\left(\frac{t}{2w}\right)^2$$

o, dado que $\mu \approx 0.33$, queda:

$$\sigma_{st} = 3.61E\left(\frac{t}{2w}\right)^2$$

y, despejando $2w$:

$$2w = 1.9t\sqrt{\frac{E}{\sigma_{st}}}$$

Ensayos posteriores han mostrado que un coeficiente de 1.7 da mejores resultados que el de 1.9, por lo que la expresión que se suele utilizar para el ancho de chapa efectiva correspondiente a cada uno de los paneles adyacentes al larguerillo es:

$$w = 0.85t\sqrt{\frac{E}{\sigma_{st}}}$$

Por supuesto, este valor será como máximo la semianchura del panel.

Por consiguiente, si se conoce el esfuerzo en el larguerillo, se puede determinar el área efectiva de panel que se sumará a la del larguerillo para obtener el área del *boom*. Sin embargo, dado que los esfuerzos existentes en los larguerillos son en principio desconocidos, será necesario realizar un proceso iterativo. Al final de este Capítulo se incluirán algunos ejemplos en los que se verá con claridad los pasos que hay que seguir.

Efecto del pandeo de los larguerillos

Si a un larguerillo se le une su chapa efectiva y se ensaya a compresión impidiéndole los desplazamientos en dirección transversal, se obtiene una curva de esfuerzos-deformaciones tal como la (1) de la figura 7.5. Por supuesto, la longitud del especimen de ensayo ha de ser igual a la distancia entre costillas existente en el ala.

Los cordones de los largueros, al estar estabilizados en las dos direcciones, fallan a *crippling*. Por ello, si se toma una pieza de estos elementos lo suficientemente corta para que no pandee y se ensaya a compresión, se obtiene la curva (2) de la figura 7.5.

Como se ha indicado en el Apartado 7.1.1, la curva (1) de la figura 7.5 muestra cómo el larguerillo retiene aproximadamente su carga de pandeo para un aumento considerable de las deformaciones longitudinales. Por otra parte, comparando las curvas (1) y (2) de la figura 7.5, también se observa cómo una vez que han pandeado los larguerillos, los cordones de los largueros están más cargados que ellos. O, dicho de otra forma, los cordones de los largueros son más efectivos que los larguerillos.

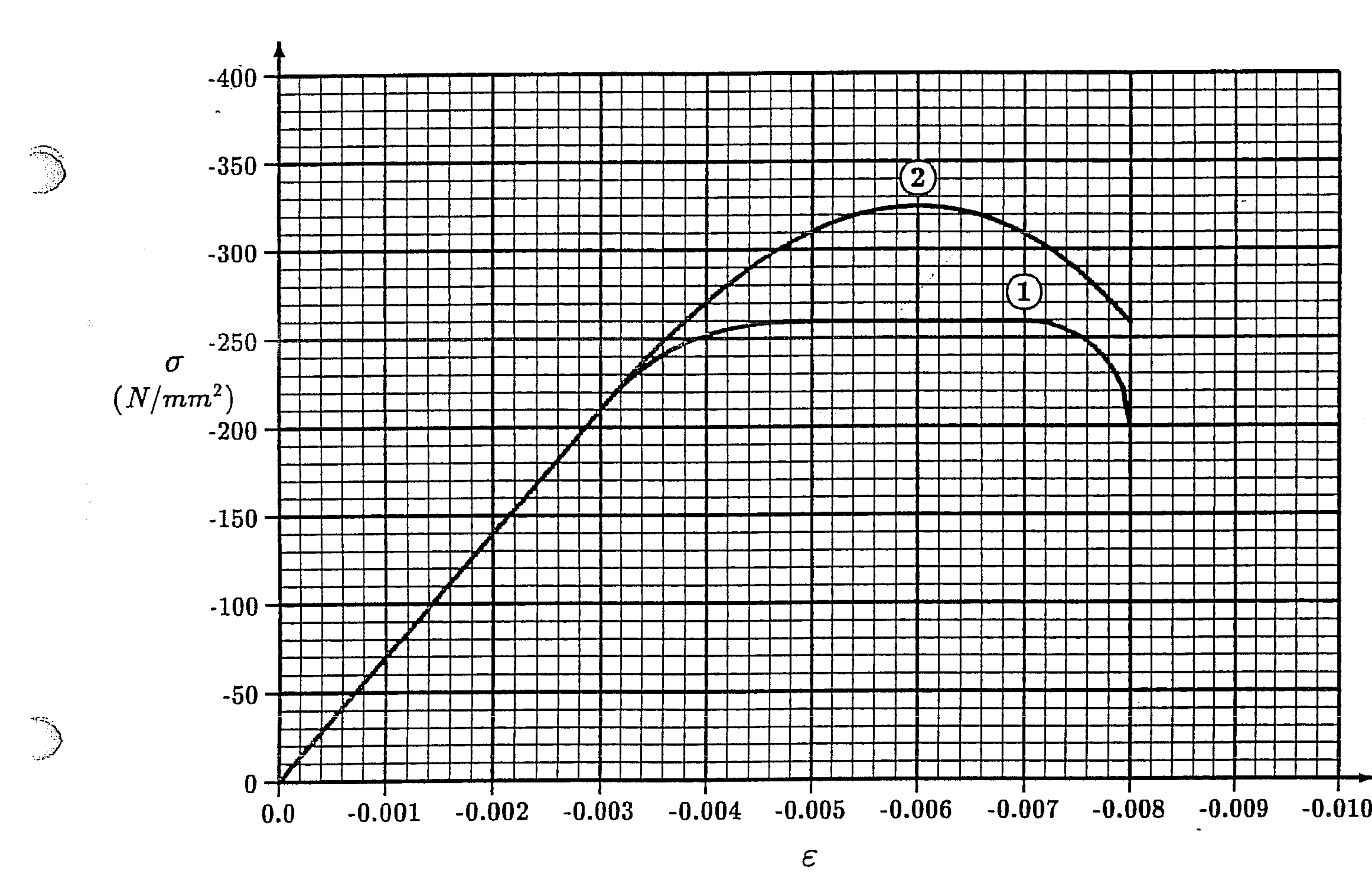


Figura 7.5: Curvas $\sigma - \varepsilon$ de un larguerillo y un cordón de larguero a compresión

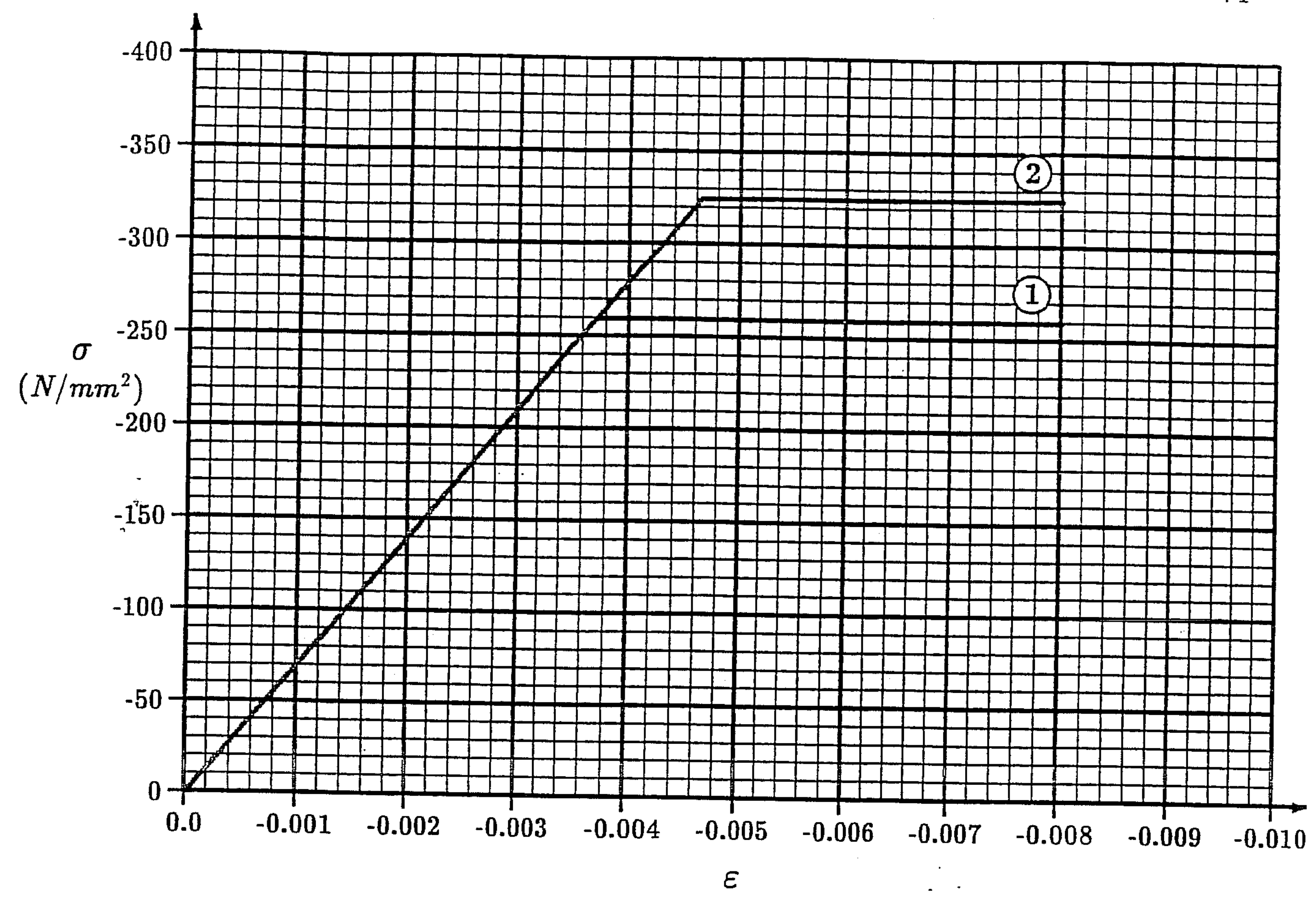


Figura 7.6: Curvas $\sigma - \varepsilon$ simplificadas de un larguerillo y un cordón de larguero a compresión

En la figura 7.5 se observa que a partir de un determinado valor, los esfuerzos normales dejan de ser proporcionales a las deformaciones longitudinales. A fín de poder aplicar la teoría de vigas en flexión, será necesario de nuevo corregir el área de los *booms* multiplicándola por un factor de efectividad c. Este factor se calculará, de forma similar al caso de cargas de tracción, dividiendo el esfuerzo real correspondiente a la deformación longitudinal existente en el elemento (obtenida de las curvas de esfuerzos-deformaciones en compresión, tales como las indicadas en la figura 7.5) por el esfuerzo obtenido aplicando la teoría de vigas en flexión ($E\varepsilon$).

Si no se tienen las curvas de esfuerzos-deformaciones de los larguerillos y los cordones a compresión, se puede suponer de forma aproximada que los esfuerzos crecen proporcionalmente a las deformaciones hasta alcanzar los valores de fallo respectivos, y a partir de ahí se mantienen constantes, es decir, que las curvas tienen las formas mostradas en la figura 7.6, lo cual simplificará el análisis.

Dado que el factor de efectividad depende de una relación de esfuerzos que son en principio desconocidos, será necesario de nuevo seguir un proceso iterativo. En los ejemplos incluídos al final de este Capítulo se muestran con claridad los pasos a seguir.

7.2.3 Area efectiva del alma de los largueros

Las almas de los largueros están normalmente trabajando a flexión casi pura. La forma de proceder para determinar el área de chapa efectiva que trabaja junto con los cordones será la siguiente:

Cordón a tracción

Según se dedujo en el Apartado 6.2 del Capítulo 6, el área efectiva de un panel a flexión pura viene determinada por la expresión:

$$A_r = \frac{bt}{6}$$

siendo b la altura del alma.

Cordón a compresión

El área del revestimiento efectivo se determinará, al igual que para los revestimientos en compresión, por la expresión deducida en el Apartado 7.2.2 de este Capítulo:

$$wt = 0.85t^2\sqrt{\frac{E}{\sigma_{st}}}$$

pero en este caso, el máximo de este valor será $bt/6$, que corresponde a un panel totalmente efectivo sometido a flexión.

De nuevo será necesario seguir un proceso iterativo dado que el área efectiva depende de unos esfuerzos desconocidos en principio.

7.3 Convenio de signos

En la figura 7.7 se representa el sistema de ejes adoptado, así como los sentidos que se considerarán positivos para las solicitaciones que actúan sobre las caras frontal y dorsal de una rebanada elemental de ala.

7.4 Cálculo de los esfuerzos normales

Una vez realizada la idealización estructural de la sección del ala y determinadas las propiedades geométricas de la sección efectiva ante cargas axiales y de flexión (es decir, la constituída por los *booms*), se determinarán los esfuerzos normales existentes en los *booms*. Para ello, se utilizarán las conocidas expresiones de la teoría de vigas en flexión:

$$\sigma_{r_y} = \frac{N_y}{A} - [(k_3M_z - k_1M_x)(X_r - X_g) + (k_2M_x - k_1M_z)(Z_r - Z_g)]$$

en donde:

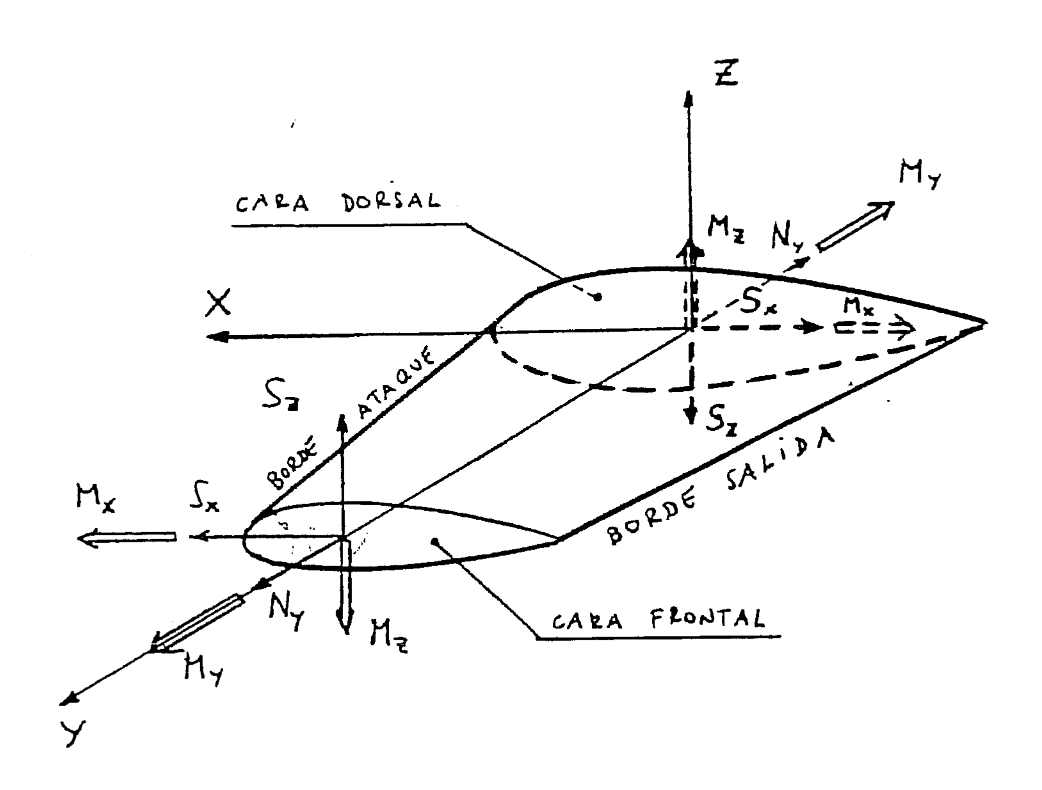


Figura 7.7: Sentidos positivos de las solicitaciones en la sección de un ala

$$k_1 = \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}$$

$$k_2 = \frac{I_{zz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}$$

$$k_3 = \frac{I_{xx}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}$$

X_r y Z_r son las coordenadas del *boom* r, X_g y Z_g, las del centro de gravedad de la sección efectiva del ala, A, I_{xx}, I_{zz} e I_{xz} son las propiedades geométricas de la sección efectiva y N_y, M_x y M_z son las solicitaciones que actúan en la sección. Teniendo en cuenta el convenio de signos adoptado en el Apartado anterior, el esfuerzo σ_y obtenido aplicando la expresión anterior será de tracción si es positivo, y de compresión si es negativo.

Los esfuerzos obtenidos por la expresión anterior han de ser multiplicados posteriormente por el factor de efectividad c a fín de obtener los esfuerzos reales existentes en cada elemento. La carga que actúa sobre el *boom* será, pues:

$$P_{T_y} = cA_{b_r}\sigma_{r_y}$$

Estas expresiones dan las componentes según el eje Y de los esfuerzos y las cargas normales en cada *boom*. Si el ala tiene conicidad será necesario determinar

las componentes según los eje X y Z, que, si bien tendrán poca influencia en la carga total normal (salvo que la conicidad fuera muy pronunciada), han de ser tenidas en cuenta para determinar la cortadura que está siendo realmente soportada por el revestimiento. Las cargas normales totales sobre el elemento serán:

$$P_r = \sqrt{P_{r_x}^2 + P_{r_y}^2 + P_{r_z}^2}$$

Los valores de P_{r_x} y de P_{r_z} se determinarán por consideraciones geométricas. En efecto, si las proyecciones sobre los planos $Y - Z$ e $Y - X$ de un *boom* cualquiera sobre el que actúa una carga P_{r_y} son las indicadas en la figura 7.8, los valores de las otras dos componentes de la carga normal serán:

$$P_{r_x} = -\frac{\delta x}{\delta y} P_{r_y} \qquad P_{r_z} = -\frac{\delta z}{\delta y} P_{r_y}$$

Los signos negativos se deben a las sentidos considerados para δx y δz en las figuras.

7.5 Cálculo de los esfuerzos de cortadura

Con la idealización estructural que se hace de las secciones del ala, se obtienen los esfuerzos medios de cortadura existentes en los paneles situados entre cada dos *booms*, pero no la ley que tiene la distribución de dichos esfuerzos. De cualquier manera, la resultante estática que se obtiene en ambos casos será la misma. Es decir, si se tiene, como un ejemplo simple, un perfil en C cargado con una cortadura S_z, la distribución real de esfuerzos de cortadura será como la indicada en la figura 7.9 izquierda. Sin embargo si esta sección se idealiza con varios *booms* y un revestimiento efectivo a cortadura, la distribución obtenida para los esfuerzos de cortadura será la indicada en la figura de la derecha. Pero ambas distribuciones serán estáticamente equivalentes.

Según lo anterior, los esfuerzos de cortadura sólo sufrirán cambios al pasar de un panel a otro a través de un *boom*. A continuación se determinará cuánto vale este cambio. ⇒ el flujo es cte entre los booms. (*)

Sea una rebanada elemental de longitud δy de un ala que ha sido idealizada con una serie de *booms* que soportan las cargas axiales y de flexión y con un revestimiento que soporta las cargas de cortadura y de torsión. Los esfuerzos existentes en un *boom* cualquiera de área A_b y en los paneles adyacentes son los que se muestran en la figura 7.10.

Planteando el equilibrio del *boom*, queda:

$$\left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\delta y\right) A_b - \sigma_y A_b - q_1 \delta y + q_2 \delta y = 0$$

en donde q_1 y q_2 son positivas si tienen los sentidos mostrados en la figura 7.10 (q_2 "sale" del *boom* y q_1 "entra" en él).

Despejando q_2, queda:

$$q_2 = q_1 - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} A_b$$

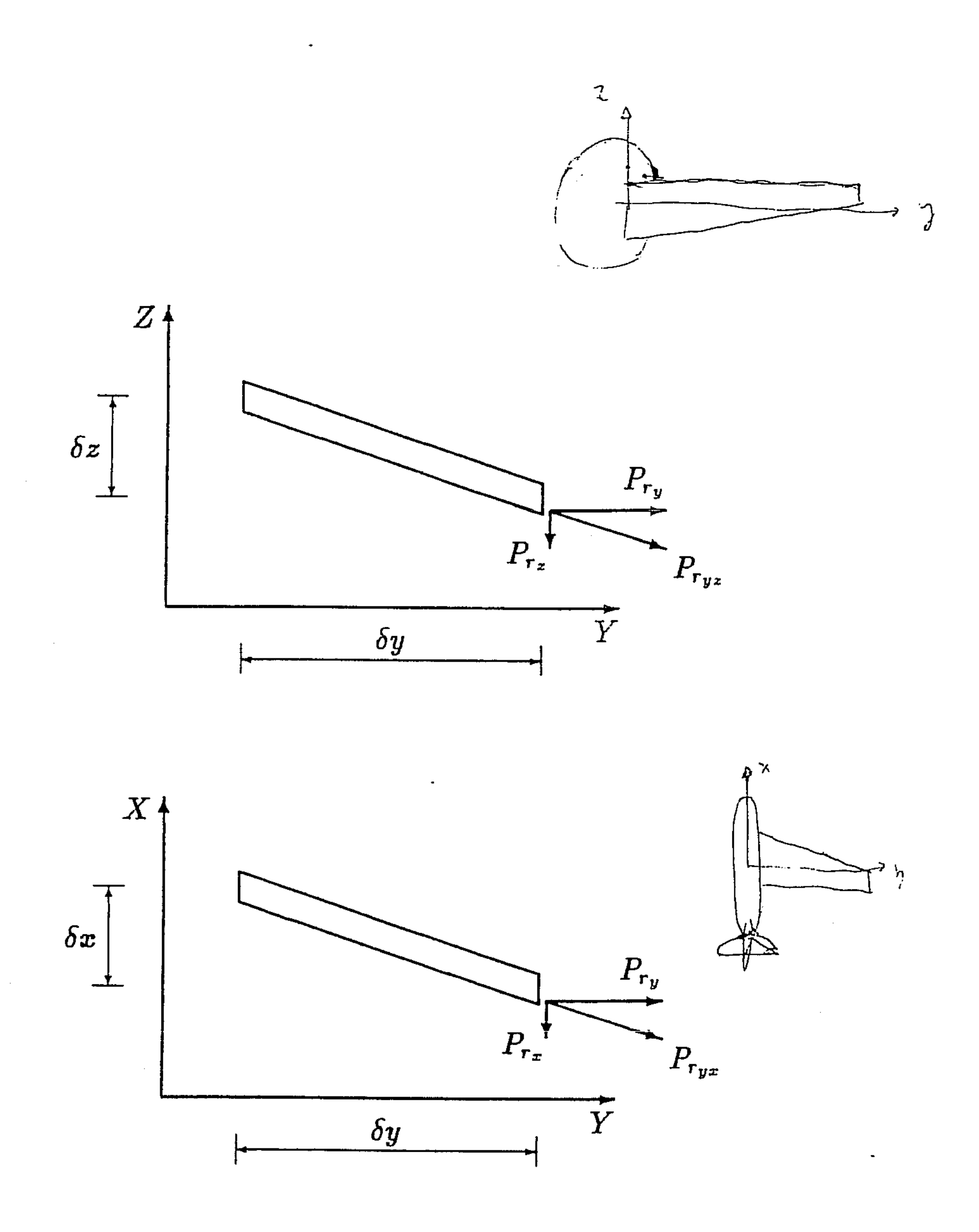


Figura 7.8: Proyección del *boom* r en los planos $Z - Y$ y $X - Y$

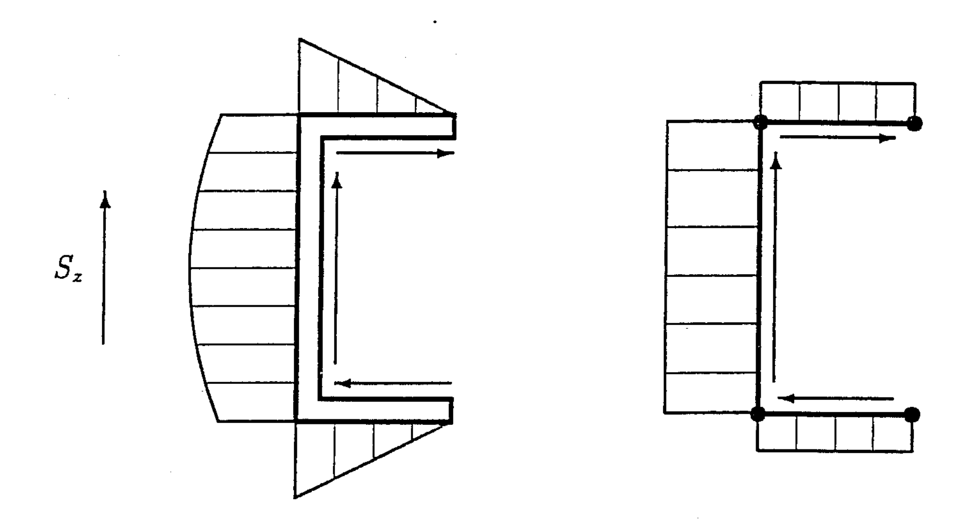


Figura 7.9: Distribuciones de esfuerzos de cortadura en una sección real e idealizada

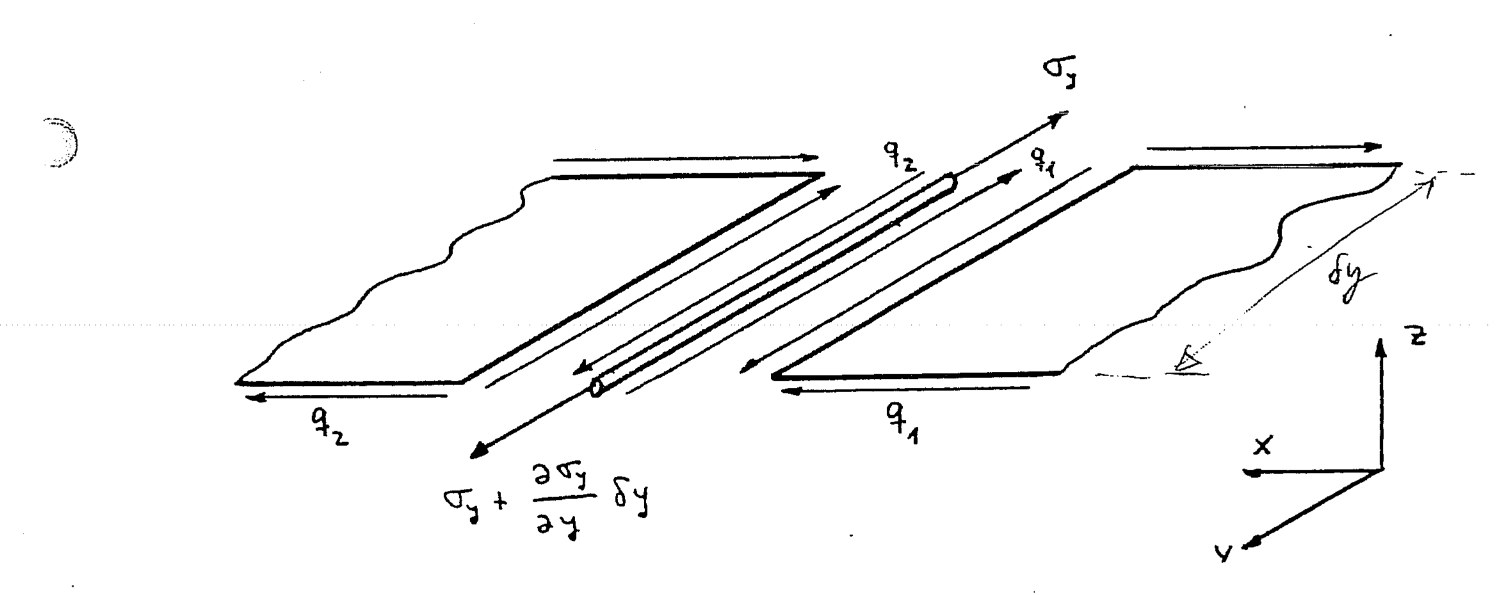


Figura 7.10: Esfuerzos en un *boom* y en sus dos paneles adyacentes

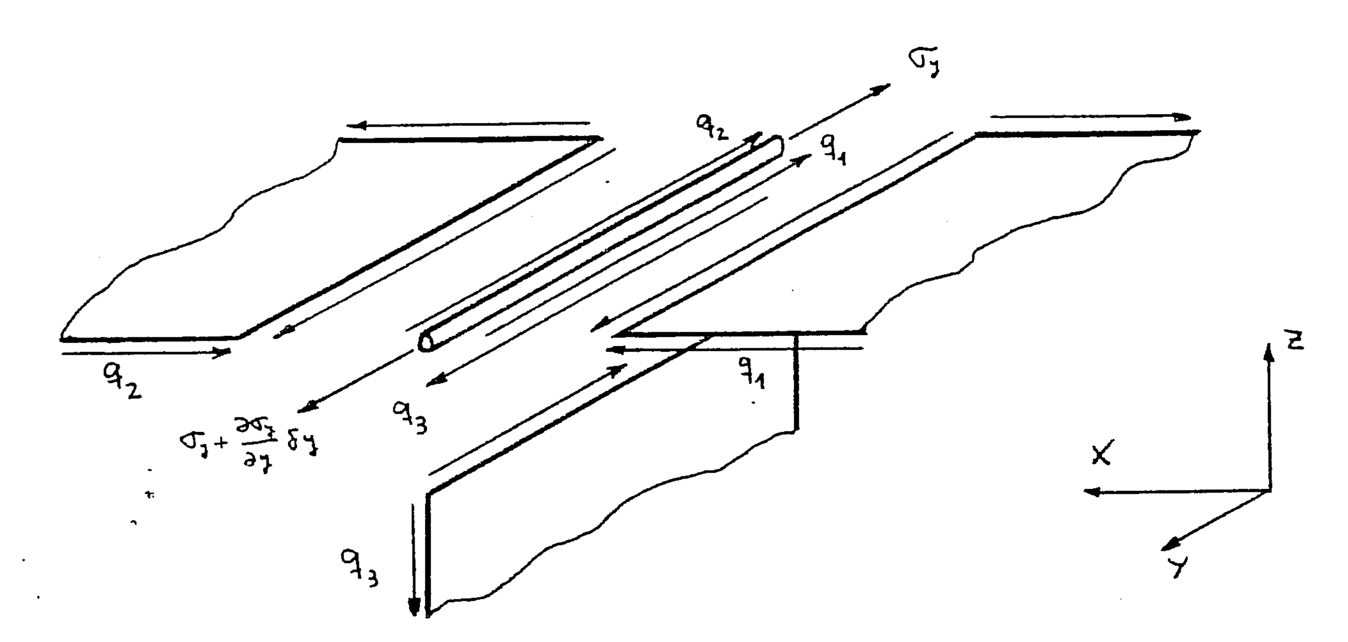


Figura 7.11: Esfuerzos en un *boom* y en sus tres paneles adyacentes

Si en el *boom* concurrieran tres paneles, el flujo en el tercero se puede obtener de forma similar en función de los flujos en los otros dos (ver figura 7.11):

$$\left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\delta y\right) A_b - \sigma_y A_b - q_1\delta y - q_2\delta y + q_3\delta y = 0$$

$$q_3 = q_1 + q_2 - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} A_b$$

en donde q_1, q_2 y q_3 son positivas si tienen los sentidos mostrados en la figura 7.11 (q_3 "sale" del *boom*, q_1 y q_2 "entran" en él).

En consecuencia, se puede determinar el flujo en un panel si se conocen los flujos en los otros paneles que concurren con él en un *boom* y se conoce el valor de:

$$-\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} A_b$$

en el *boom*. Para determinar éste último, se pueden seguir dos procedimientos:

Cálculo de $\partial\sigma_y/\delta y$

A) A partir de las fuerzas de cortadura existentes en la sección.

Este procedimiento es aplicable cuando las propiedades de la sección transversal son constantes o varían muy poco a lo largo de la envergadura del ala en las proximidades de la sección que se está calculando.

Si se sustituye σ_y por su valor, dado en el Apartado 7.4, queda:

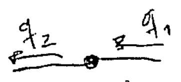
$$q_2 = q_1 + \left[\left(k_3\frac{\partial M_z}{\partial y} - k_1\frac{\partial M_x}{\partial y}\right)(X_r - X_g) + \left(k_2\frac{\partial M_x}{\partial y} - k_1\frac{\partial M_z}{\partial y}\right)(Z_r - Z_g)\right] c A_{b_r}$$

en donde se supone que la fuerza axial se mantiene constante a lo largo de la rebanada elemental.

De acuerdo con el convenio de signos adoptado en el Apartado 7.3, se cumple que:

$$S_x = -\frac{\partial M_z}{\partial y} \qquad S_z = -\frac{\partial M_x}{\partial y}$$

Por tanto, sustituyendo estas expresiones arriba, queda:



$$q_2 = q_1 - [(k_3 S_x - k_1 S_z)(X_r - X_g) + (k_2 S_z - k_1 S_x)(Z_r - Z_g)]cA_{b_r}$$

en donde k_1, k_2 y k_3 tienen los valores indicados en el Apartado 7.4.

Si el ala tiene conicidad, en lugar de S_x y S_z se han de utilizar en las expresiones anteriores las fuerzas cortantes que están siendo resistidas por el revestimiento:

$$S_{w_x} = S_x - \sum_r P_{r_x}$$

$$S_{w_z} = S_z - \sum_r P_{r_z}$$

siendo P_{r_x} y P_{r_z} las componentes según los ejes X y Z de la cargas normales que actúan en el boom r y estando extendido el sumatorio a todos los *booms* de la sección.

B) **A partir de las cargas en los *booms* en dos secciones muy próximas**

Este procedimiento es aplicable cuando las propiedades de la sección transversal varían a lo largo de la envergadura del ala en las proximidades de la sección que se está calculando, si bien supone que las cargas normales en los *booms* varían linealmente entre las dos secciones próximas que se consideran para el cálculo.

Dado que:

$$\frac{\partial \sigma_{r_y}}{\partial y} A_{b_r} = \frac{\partial P_{r_y}}{\partial y}$$

queda:

$$q_2 = q_1 - \frac{\partial P_{r_y}}{\partial y}$$

Si se supone que la carga normal en el *boom* varía linealmente a lo largo del eje Y en las proximidades de la sección que se está calculando, la ecuación anterior se puede poner en la forma:

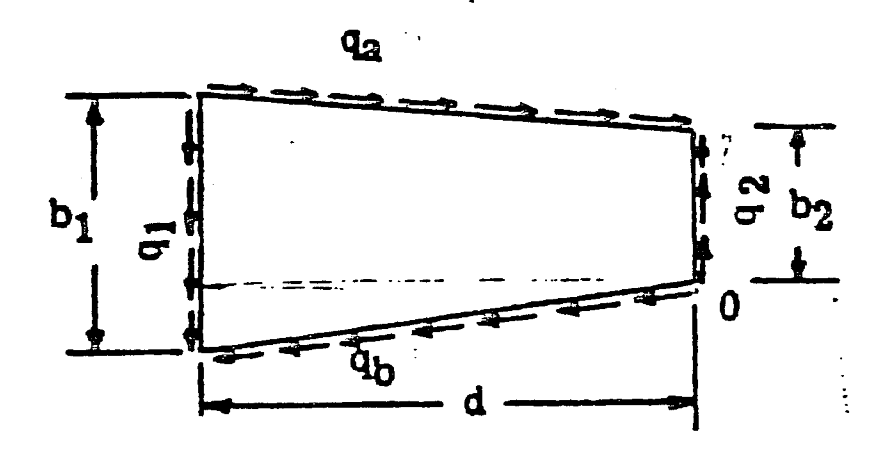


Figura 7.12: Flujos en un panel con conicidad

$$q_2 = q_1 - \frac{\Delta P_{r_y}}{\Delta y}$$

en donde ΔP_{r_y} es lo que varía P_r en la longitud Δy.

La aplicación de este procedimiento dará resultados aproximados en los casos en los que la variación de la carga normal en los *booms* no sea lineal. Sin embargo, este procedimiento presenta la ventaja de que es aplicable a los casos en los que las propiedades de las secciones transversales del ala no se mantengan constantes.

Por otra parte, hay que hacer notar que si el ala tiene conicidad, los paneles del revestimiento y/o los del alma de los largueros pueden tener una anchura variable. En la figura 7.12 se representa una parte de uno de estos paneles, comprendida entre dos secciones del ala. Mediante las expresiones desarrolladas anteriormente se obtiene el flujo de cortadura q_a que se supone constante entre las dos secciones. Sin embargo, los flujos q_1 y q_2 correspondientes a las secciones no son iguales a q_a. En efecto, el panel ha de estar en equilibrio bajo la acción de los flujos q_a, q_1 y q_2. Tomando momentos con respecto al punto O e igualando a cero:

$$\sum M_o = q_a b_2 d - q_1 b_1 d = 0 \Longrightarrow q_1 = \frac{b_2}{b_1} q_a = \lambda_1 q_a$$

Y, de forma similar, se obtiene que:

$$q_2 = \frac{b_1}{b_2} q_a = \lambda_2 q_a$$

Los factores λ_1 y λ_2 suelen ser bastante próximos a la unidad, por lo que, salvo que la conicidad sea muy pronunciada, no sería necesario tenerlos en cuenta.

Con todo lo descrito hasta aquí se han dado dos procedimientos que permiten calcular los cambios que se producen en los flujos de cortadura al pasar de un panel a otro a través de un *boom*. Por consiguiente, si se conociera el valor del flujo en un panel, se podrían determinar los valores correspondientes al resto de los paneles. Si la sección fuese abierta, el problema estaría resuelto, puesto que en el panel que tiene un borde libre el flujo es nulo. Si la sección es cerrada, el problema no está determinado, existiendo tantas incógnitas como celdas cerradas tenga la sección. En efecto, si se conociera el valor que tiene el flujo en un panel de cada celda, se podrían determinar los valores en los restantes paneles en función de éste. Basado en ésto, el procedimiento a seguir será el siguiente:

1. Se supondrá nulo el flujo en un panel cualquiera de cada celda. Esto es tanto como suponer que la celda está abierta por este panel. Conviene que el tramo que se supone abierto no sea uno de división entre dos celdas. De esta forma, la incógnita correspondiente a cada celda sólo afectará a los tramos de esa celda y no a los demás, siendo los cálculos menos engorrosos.

2. Se determinarán los flujos q_b en cada uno de los restantes paneles de la sección por los procedimientos descritos anteriormente.

3. El flujo total en cada panel será igual al calculado en el punto anterior más una constante para cada celda (ver figura 7.13):

   - Para los tramos comunes a las celdas $R-1$ y R:

   $$q_n = q_{b_n} - q_{R-1} + q_R$$

   - Para los tramos comunes a las celdas R y $R+1$:

   $$q_n = q_{b_n} + q_R - q_{R+1}$$

   - Para el resto de los tramos no comunes a dos celdas:

   $$q_n = q_{b_n} + q_R$$

Existen, pues, N incógnitas, siendo N el número de celdas. Para determinar estas incógnitas se disponen de N ecuaciones:

a) Una ecuación resultante de plantear la equivalencia entre las solicitaciones que actúan en la sección y los flujos de cortadura desarrollados en ella. Por ello, han de ser iguales los momentos con respecto a cualquier punto de ambos sistemas. Si en la figura 7.14 se toman momentos con respecto al punto O, queda:

   – Momento de las solicitaciones:

   $$M_S = M_y + S_x(Z_p - Z_o) - S_z(X_p - X_o)$$

   siendo X_p y Z_p las coordenadas del punto de aplicación de las cargas.

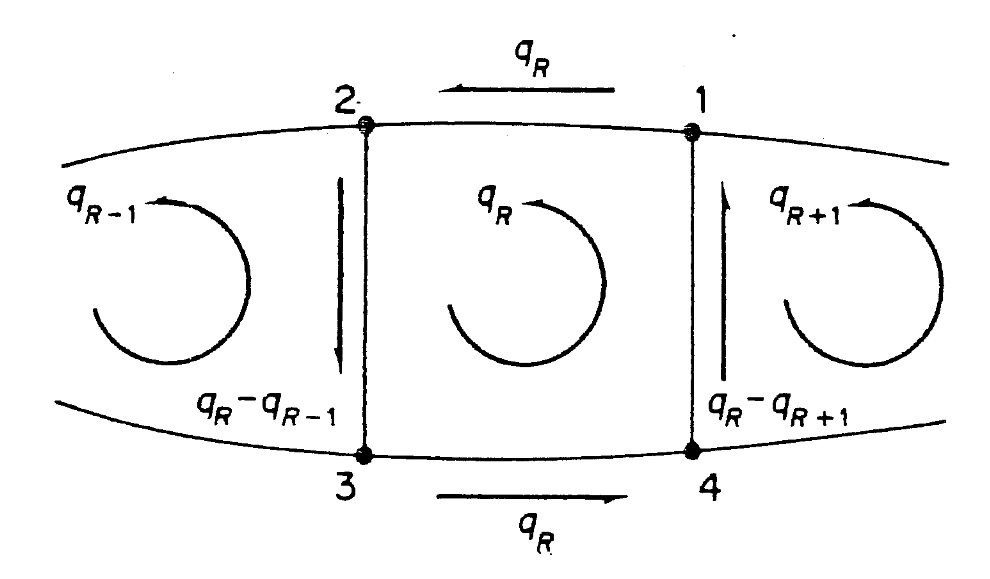


Figura 7.13: Distribución del flujo a cortadura en la celda R

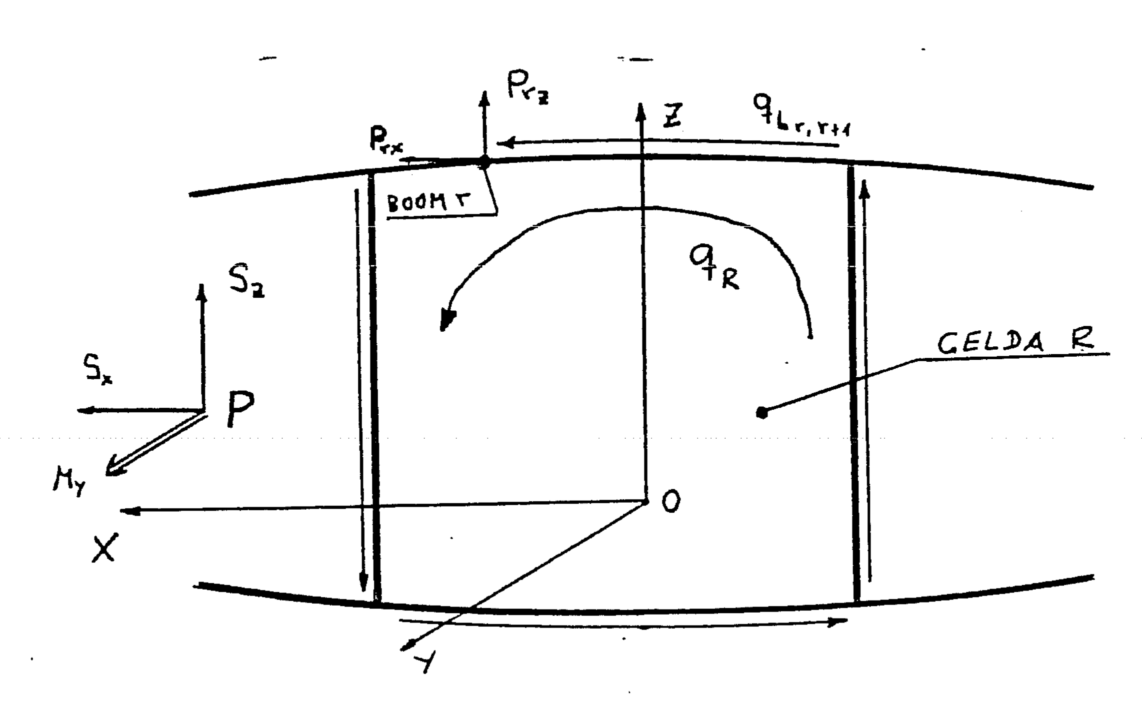


Figura 7.14: Cargas y flujos de cortadura en el plano de la celda R

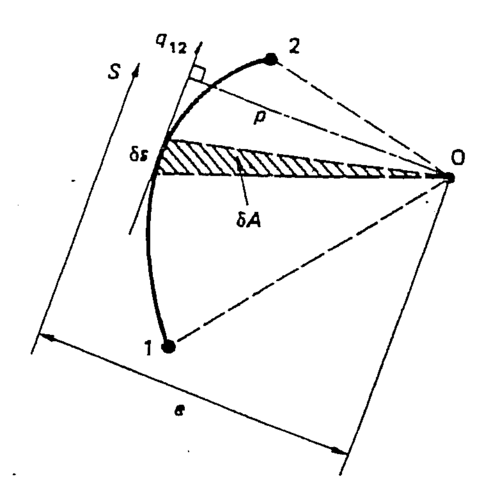


Figura 7.15: Momento producido por un flujo de cortadura constante

- Momento de las componentes según los ejes X y Z de las cargas en los *booms*:

$$M_P = \sum_r P_{r_x}(Z_r - Z_o) - \sum_r P_{r_z}(X_r - X_o)$$

estando el sumatorio extendido a todos los *booms*, y siendo X_r y Z_r las coordenadas del *boom* r.

- Momento de los flujos de cortadura:

Al ser constante el flujo de cortadura en cada tramo, su momento con respecto a un punto O es igual al producto del valor que tiene el flujo por el doble del área encerrada por el tramo y las rectas que unen sus extremos con el punto O. En efecto para un tramo cualquiera (ver figura 7.15):

$$M_q = \int_1^2 q_{12} p \, ds = q_{12} \int_1^2 2dA = 2A_{12}q_{12}$$

Así pues, el momento respecto al punto O de los flujos de cortadura será:

$$M_q = 2\sum_n A_n q_n$$

estando el sumatorio extendido a todos los tramos de la sección.

Expresando los valores de q en función de los de q_b calculados anteriormente suponiendo que la sección era abierta y de las incógnitas q_R, queda:

$$M_q = 2\sum_n A_n q_{b_n} + 2\sum_R A_R q_R$$

nótese que el primer sumatorio está extendido a todos los tramos de la sección, siendo A_n el área determinada por el punto O y el tramo n y q_{b_n} el flujo de cortadura correspondiente a la sección abierta que hay en ese tramo. Sin embargo, el segundo sumatorio está extendido a las celdas, siendo A_R el área de la celda R y q_R el flujo incógnita en la misma.

La primera ecuación es, pues:

$$M_S = M_P + M_q$$

b) Si la sección no sufre distorsión, se ha de cumplir que el giro por unidad de longitud ha de ser igual para todas las celdas. Esto da lugar a $N-1$ ecuaciones más.

El giro por unidad de longitud de la celda R viene dado por la expresión:

$$\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_R = \frac{1}{2A_R}\oint_R \frac{q_n}{G_n t_n} ds$$

siendo q_n, G_n y t_n el flujo de cortadura, el módulo elástico a cortadura y el espesor de cada uno de los tramos n a lo largo de la celda R.

Dado que los valores de q_n, G_n y t_n se mantienen constantes en cada tramo, la expresión anterior se puede poner en la forma:

$$\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_R = \frac{1}{2A_R}\sum_R \frac{q_n L_n}{G_n t_n}$$

siendo L_n la longitud del tramo n.

Si G es constante para todos los tramos de la celda, se puede sacar del sumatorio. Si no es así, se puede tomar un valor G_{ref} de referencia, de modo que la expresión anterior se puede poner en la forma:

$$\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_R = \frac{1}{2A_R G_{ref}}\sum_R \frac{q_n L_n}{t_n^*}$$

siendo t_n^*:

$$t_n^* = \frac{G_n}{G_{ref}} t_n$$

Teniendo en cuenta las expresiones que dan los valores de q_n en función de q_{b_n} y q_R, queda:

$$\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_R = \frac{1}{2A_R G_{ref}}\left(-q_{R-1}\delta_{R-1,R} + q_R\delta_R - q_{R+1}\delta_{R+1,R} + \sum_R \frac{q_{b_n} L_n}{t_n^*}\right)$$

siendo $\delta_{R-1,R}$ la suma de los valores de L_n/t_n^* correspondientes a los tramos comunes a las celdas $R-1$ y R; $\delta_{R+1,R}$ la suma de los valores de L_n/t_n^* correspondientes a los tramos comunes a las celdas $R+1$ y R; δ_R la suma de los valores de L_n/t_n^* correspondientes a todos los tramos de la celda R, y el sumatorio está extendido a los tramos de la celda R.

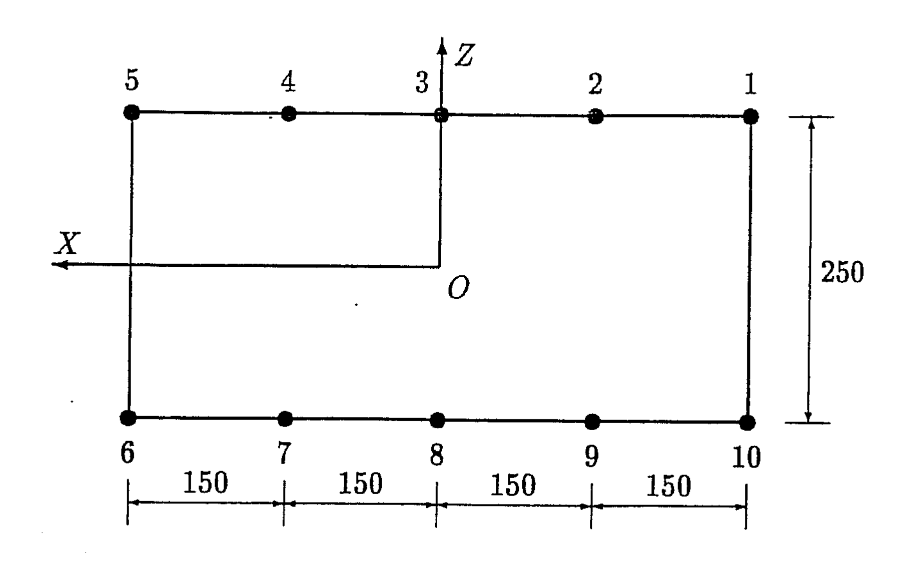


Figura 7.16: Sección de ala del ejemplo 1

7.6 Ejemplos

7.6.1 Ejemplo 1

Se desea calcular el máximo momento flector positivo con respecto al eje X que es capaz de soportar la sección de ala mostrada en la figura 7.16. Los datos de la sección son:

Espesor del revestimiento superior:	1.0	mm
Espesor del revestimiento inferior:	0.8	mm
Espesor del alma de los largueros:	1.0	mm
Area de los larguerillos superiores:	90	mm^2
Area de los larguerillos inferiores:	70	mm^2
Area de los cordones de los largueros:	175	mm^2

Se hará el cálculo suponiendo que las curvas $\sigma - \varepsilon$ de los larguerillos y los cordones de los largueros que están en el revestimiento superior (que es el que está a compresión debido a un M_x positivo) son las (1) y (2), respectivamente, de la:

a) figura 7.5, en la página 73.

b) figura 7.6, en la página 74.

La curva $\sigma - \varepsilon$ en tracción del material es la indicada en la figura 7.17.

<u>**Solución a)**</u>

Como se ha indicado anteriormente, el máximo momento flector positivo M_x será aquel que produzca el fallo del cordón de algún larguero. O lo que es lo mismo,

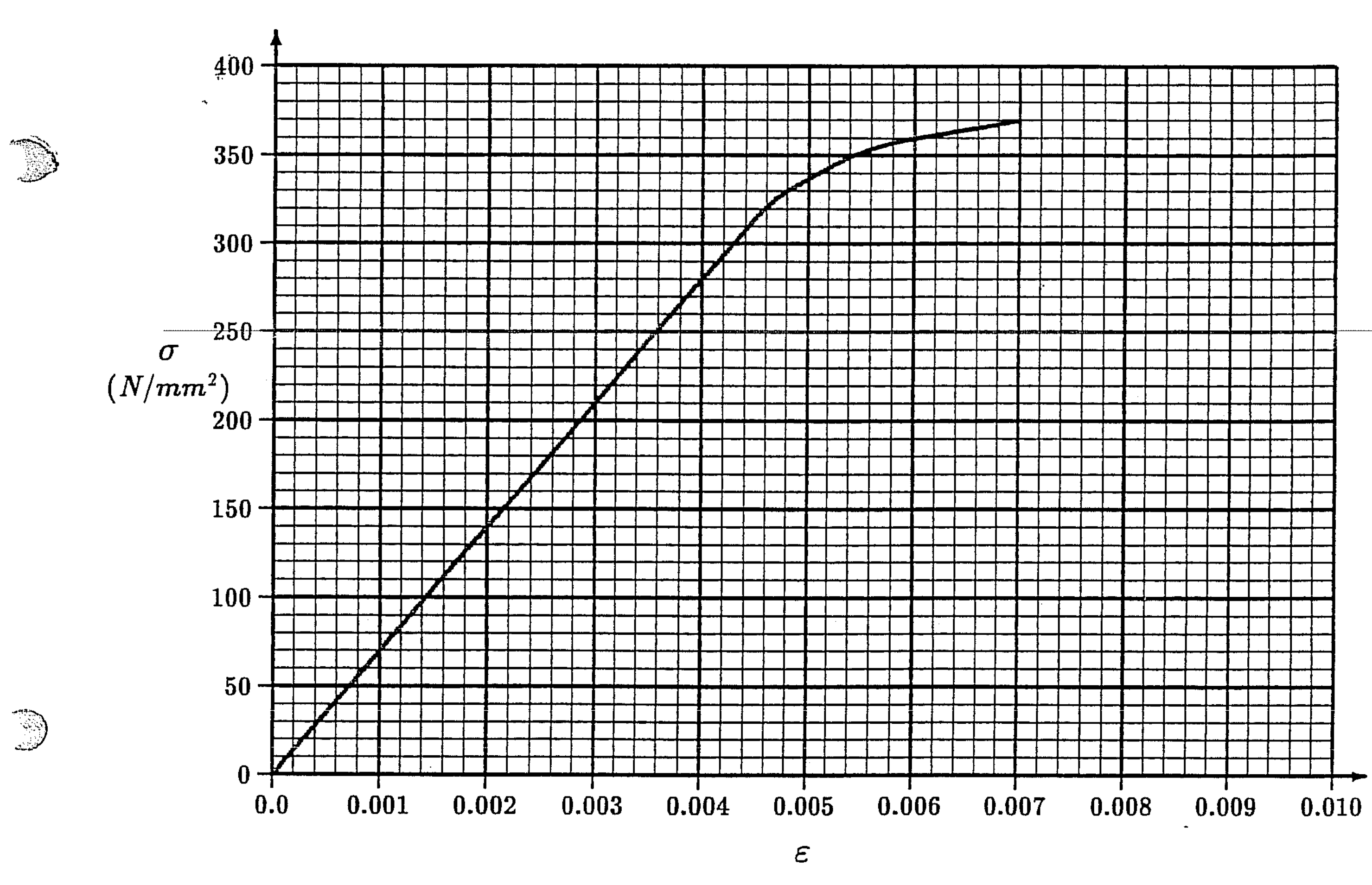


Figura 7.17: Curvas $\sigma - \varepsilon$ en tracción del material

teniendo en cuenta las curvas $\sigma - \varepsilon$ en compresión de los larguerillos y los cordones de los largueros mostradas en la figura 7.5, el momento flector buscado es el que dé lugar a una deformación longitudinal en el cordón de algún larguero del 0.6% en compresión. Dado que la sección es simétrica con respecto al eje Z y que se considera cargada sólo con un momento flector M_x, el eje neutro es paralelo al eje X. Por consiguiente, todos los elementos del revestimiento superior tendrán la misma deformación longitudinal, proporcional a su distancia al eje neutro. Igualmente ocurrirá con los elementos del revestimiento inferior. Dado que normalmente el eje neutro no coincidirá con el centro geométrico de la sección, la deformación longitudinal de los elementos del revestimiento superior será distinta de los del revestimiento inferior.

Dado que el revestimiento inferior está trabajando a tracción y el superior a compresión, la efectividad de los paneles del primero es mayor que la de los del segundo, por lo que el eje neutro estará situado por debajo del eje X. Por ello, se supondrá, en principio, que está a 50 *mm* por debajo de él.

En la tabla 7.1 se indican los cálculos necesarios para determinar las propiedades de la sección efectiva:

ITERACION 1													
Posición asumida para el c.d.g.: X_g = +0.0 Z_g = -50.0. Eje neutro asumido: +0.000X +1.000Z +50.000 = 0													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Larguerillo		A_l	X	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot A$
N^o	Tipo	(mm^2)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm^2)	(N/mm^2)	(mm^2)	(mm^2)	(σ_r/σ_l)	(mm
1	L2	175.0	-300.0	125.0	175.0	-6.000	-420.0	-325.0	24.9	199.9	0.774	154
2	L1	90.0	-150.0	125.0	175.0	-6.000	-420.0	-260.0	27.9	117.9	0.619	73.
3	L1	90.0	0.0	125.0	175.0	-6.000	-420.0	-260.0	27.9	117.9	0.619	73.
4	L1	90.0	150.0	125.0	175.0	-6.000	-420.0	-260.0	27.9	117.9	0.619	73.
5	L2	175.0	300.0	125.0	175.0	-6.000	-420.0	-325.0	24.9	199.9	0.774	154.
6	L2	175.0	300.0	-125.0	-75.0	2.571	180.0	180.0	101.7	276.7	1.000	276.
7	L3	70.0	150.0	-125.0	-75.0	2.571	180.0	180.0	120.0	190.0	1.000	190.
8	L3	70.0	0.0	-125.0	-75.0	2.571	180.0	180.0	120.0	190.0	1.000	190.
9	L3	70.0	-150.0	-125.0	-75.0	2.571	180.0	180.0	120.0	190.0	1.000	190.
10	L2	175.0	-300.0	-125.0	-75.0	2.571	180.0	180.0	101.7	276.7	1.000	276.

Area = 1652. mm^2; X_g = 0.0 mm; Z_g = -45.0 mm

I_{xx} = 2.2459842E+07 mm^4; I_{zz} = 8.9484264E+07 mm^4; I_{xz} = 0.0000000E+00 mm^4

Eje neutro obtenido: +0.000X +1.000Z +45.024 = 0

Tabla 7.1: Cálculos correspondientes al ejemplo 1,a)

A continuación se da una explicación de los contenidos de cada columna:

(1) Número de cada larguerillo o cordón de larguero, de acuerdo con la figura 7.16.

(2) Tipo de cada larguerillo o cordón de larguero. Se considera que los larguerillos del revestimiento superior son del tipo L1, los del revestimiento inferior del tipo L3, y los cordones de los largueros del tipo L2.

(3) Area de cada larguerillo o cordón de larguero, según los datos dados en el enunciado.

(4) Coordenada X de cada elemento con respecto al sistema de coordenadas $X-Z$ mostrado en la figura 7.16.

(5) Coordenada Z de cada elemento con respecto al sistema de coordenadas $X-Z$ mostrado en la figura 7.16.

(6) Distancia de cada elemento al eje neutro asumido.

(7) Deformación longitudinal correspondiente a cada elemento, teniendo en cuenta que la máxima a compresión es del 0.6%. Dado que ésta se producirá en los elementos del revestimiento superior, que es el que está comprimido, la deformación correspondiente a los elementos del revestimiento inferior será:

$$\varepsilon_a = \frac{-75}{175} \times (-0.006) = 2.571 \times 10^{-3}$$

(8) Esfuerzo en cada elemento obtenido aplicando la teoría de vigas en flexión, es decir, suponiendo que los esfuerzos normales son proporcionales a las deformaciones longitudinales. En consecuencia:

$$\sigma_l = E \cdot \varepsilon_a = 70000 \cdot \varepsilon_a$$

(9) Esfuerzo en cada elemento obtenido de las figuras 7.5 y 7.17 a partir de las deformaciones ε_a.

(10) Area del revestimiento efectivo calculada según se indicó en el Apartado 7.2. Para calcular la chapa efectiva de los elementos a compresión se toma como esfuerzo existente en ellos el dado en la columna (9), que es el que realmente existe para las deformaciones de la columna (7).

(11) Area de cada *boom*, obtenida sumando la del larguerillo y la del revestimiento efectivo, es decir, las columnas (3) y (10).

(12) Coeficiente de efectividad de cada *boom*:

$$c = \frac{\sigma_r}{\sigma_l}$$

(13) Area efectiva de cada *boom*, obtenida multiplicando el área indicada en la columna (11) por el coeficiente de la columna (12).

A partir de las área efectivas, se obtienen las propiedades de la sección efectiva del ala, así como la posición de su eje neutro. Los valores de éstos, se indican en la parte inferior de la tabla 7.1.

Aunque la posición del eje neutro que se ha obtenido es distinta de la que se supuso inicialmente, sin embargo, dado que no se desea conocer los esfuerzos sino el momento flector máximo, no es necesario realizar una nueva iteración. En efecto, en la nueva iteración habría que suponer de nuevo que la deformación longitudinal

del revestimiento superior es del 0.6%, por lo que los esfuerzos en el revestimiento superior serán los mismos que los obtenidos en la primera iteración, siendo también iguales las áreas del revestimiento efectivo y, en consecuencia, de los *booms*. Por estar el eje neutro situado en otra posición, las deformaciones y, por consiguiente, los esfuerzos en el revestimiento inferior serán distintos; pero dado que éste está a tracción, las áreas de los *booms* serán las mismas. Es decir, que en la nueva iteración se obtendrían las mismas propiedades de la sección efectiva del ala.

Una vez determinadas las propiedades de la sección efectiva del ala, se puede determinar el máximo momento flector positivo M_x a partir de las expresiones dadas en el Apartado 7.4. Dado que $I_{xz} = 0$, $N_y = 0$ y $M_z = 0$, la expresión que da los esfuerzos normales se reduce a:

$$\sigma_y = -\frac{M_x d_l}{I_{xx}}$$

en donde σ_y es el esfuerzo obtenido aplicando la teoría de vigas en flexión y d_l es la distancia de cada elemento al eje neutro obtenido.

Despejando el valor de M_x:

$$M_x = -\frac{\sigma_y I_{xx}}{d_l}$$

El máximo valor de M_x se obtendrá dividiendo el esfuerzo σ_l correspondiente a cualquier elemento por su distancia al eje neutro. Nótese, sin embargo, que al no haber realizado una segunda iteración, los valores de σ_l indicados en la tabla 7.1 sólo son correctos para los elementos a compresión, como ya se ha indicado anteriormente. Por ello, para obtener el M_x máximo se elegirá uno de ellos. Así por ejemplo, para el elemento 1:

$$\sigma_l = -420 \; N/mm^2$$

$$d_l = 125 + 45 = 170 \; mm$$

por tanto:

$$M_x = -\frac{-420 \times 22459842}{170} = 55.49 \times 10^6 \; N \cdot mm$$

<u>**Solución b)**</u>

En este caso, el procedimiento a seguir será igual que en el anterior, pero se utilizará como curvas $\sigma - \varepsilon$ a compresión de los larguerillos y cordones de larguero las incluídas en la figura 7.6, en lugar de las de la figura 7.5. De acuerdo con las curvas de la figura 7.6, el fallo se producirá cuando la deformación longitudinal máxima en el cordón de algún larguero sea:

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_l}{E} = \frac{-325}{70000} = -4.643 \times 10^{-3}$$

Repitiendo los cálculos para este valor, que están contenidos en la tabla 7.2, se obtienen las propiedades de la sección efectiva del ala indicadas en la parte inferior de la misma.

ITERACION 1												
Posición asumida para el c.d.g.: $X_g = +0.0$ $Z_g =$ -50.0. Eje neutro asumido: +0.000X +1.000Z +50.000 = 0												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Larguerillo		A_l	X	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot A_l$
Nº	Tipo	(mm²)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm²)	(N/mm²)	(mm²)	(mm²)	(σ_r/σ_l)	(mm²
1	L2	175.0	-300.0	125.0	175.0	-4.643	-325.0	-325.0	24.9	199.9	1.000	199.
2	L1	90.0	-150.0	125.0	175.0	-4.643	-325.0	-260.0	27.9	117.9	0.800	94.
3	L1	90.0	0.0	125.0	175.0	-4.643	-325.0	-260.0	27.9	117.9	0.800	94.
4	L1	90.0	150.0	125.0	175.0	-4.643	-325.0	-260.0	27.9	117.9	0.800	94.
5	L2	175.0	300.0	125.0	175.0	-4.643	-325.0	-325.0	24.9	199.9	1.000	199.
6	L2	175.0	300.0	-125.0	-75.0	1.990	139.3	139.3	101.7	276.7	1.000	276.
7	L3	70.0	150.0	-125.0	-75.0	1.990	139.3	139.3	120.0	190.0	1.000	190.
8	L3	70.0	0.0	-125.0	-75.0	1.990	139.3	139.3	120.0	190.0	1.000	190.
9	L3	70.0	-150.0	-125.0	-75.0	1.990	139.3	139.3	120.0	190.0	1.000	190.
10	L2	175.0	-300.0	-125.0	-75.0	1.990	139.3	139.3	101.7	276.7	1.000	276.

Area = 1806. mm²; $X_g = 0.0$ mm; $Z_g =$ -30.5 mm

$I_{xx} =$ 2.6542480E+07 mm⁴; $I_{zz} =$ 9.8583808E+07 mm⁴; $I_{xz} =$ 0.0000000E+00 mm⁴

Eje neutro obtenido: +0.000X +1.000Z +30.487 = 0

Tabla 7.2: Cálculos correspondientes al ejemplo 1,b)

Por consiguiente, el momento flector máximo será:

$$M_x = -\frac{-325 \times 26542480}{155.5} = 55.47 \times 10^6 \ N \cdot mm$$

resultado que coincide prácticamente con el del caso anterior.

7.6.2 Ejemplo 2

El ala mostrada en la figura 7.18 tiene las siguientes propiedades:

Espesor del revestimiento superior:	1.2	mm
Espesor del revestimiento inferior:	0.8	mm
Espesor del alma de los largueros:	1.0	mm
Area de los larguerillos superiores:	90	mm^2
Area de los larguerillos inferiores:	70	mm^2
Area de los cordones de los largueros:	150	mm^2

Módulo elástico a tracción del material:	70000	N/mm^2
Módulo elástico a compresión del material:	70000	N/mm^2
Módulo elástico a cortadura del material:	27000	N/mm^2

Se desea calcular para una sección situada a 1500 mm de la raíz:

I.- El factor de reserva correspondiente a las cargas de flexión.

II.- Los esfuerzos normales que actúan sobre los larguerillos y cordones de los largueros.

III.- Los esfuerzos de cortadura que actúan sobre los paneles del revestimiento y el alma de los largueros.

Los cálculos se harán suponiendo que las curvas $\sigma - \varepsilon$ de los larguerillos y los cordones de los largueros que están en el revestimiento superior (que es el que está a compresión debido a los momentos flectores que actúan en la sección) son las (1) y (2), respectivamente, de la:

a) figura 7.5, en la página 73.

b) figura 7.6, en la página 74.

La curva $\sigma - \varepsilon$ en tracción del material es la indicada en la figura 7.17, en la página 88.

Resolución

La sección situada a 1500 mm de la raíz del ala tiene la geometría mostrada en la figura 7.19. Las cargas que actúan en el punto $P\,(100, 0)$ de la sección son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
S_x &= -10000 \quad N \\
S_z &= 30000 \quad N \\
M_x &= 45\times10^6 \quad N\cdot mm \\
M_z &= -15\times10^6 \quad N\cdot mm
\end{aligned}
$$

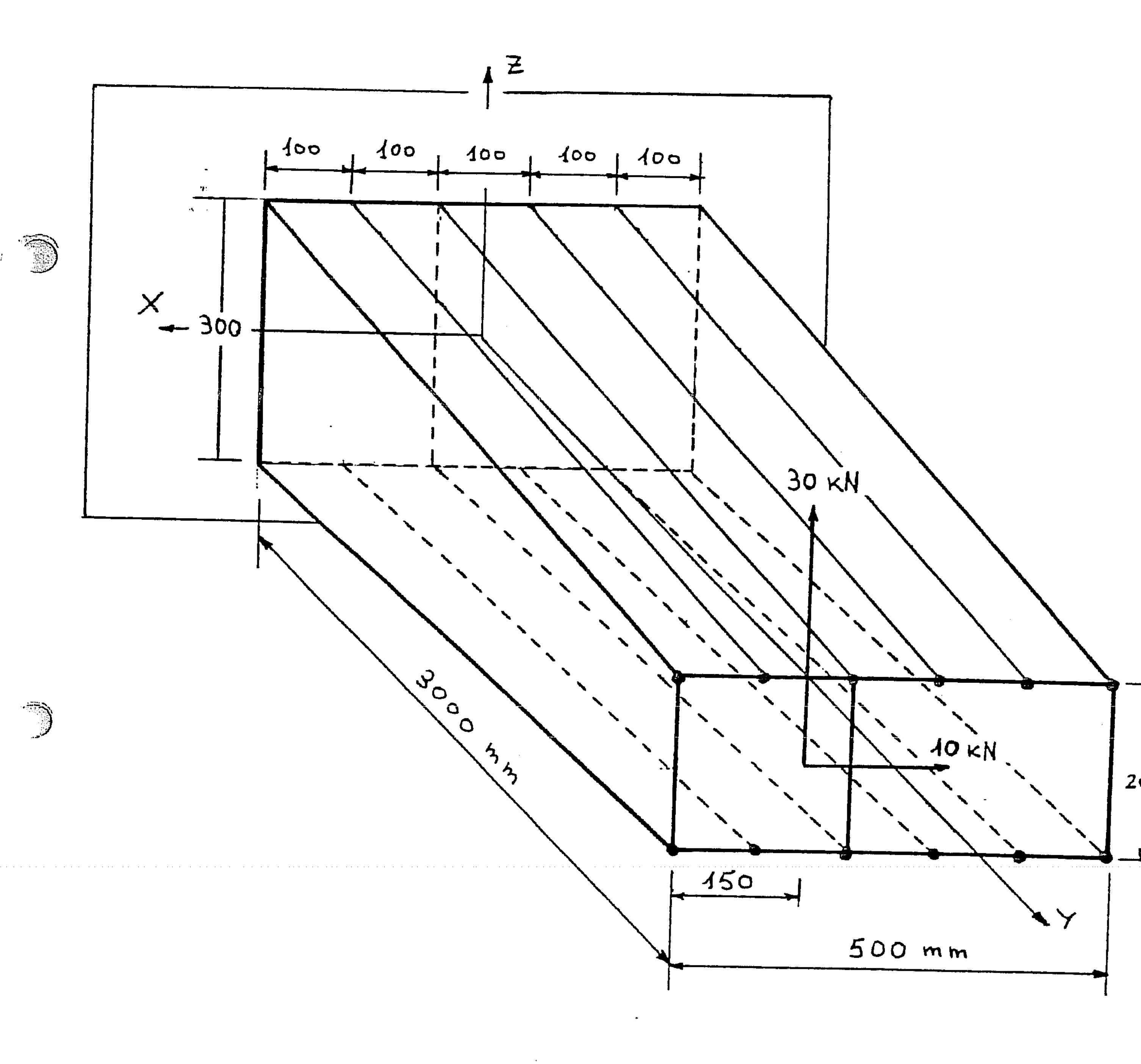


Figura 7.18: Ala del ejemplo 2

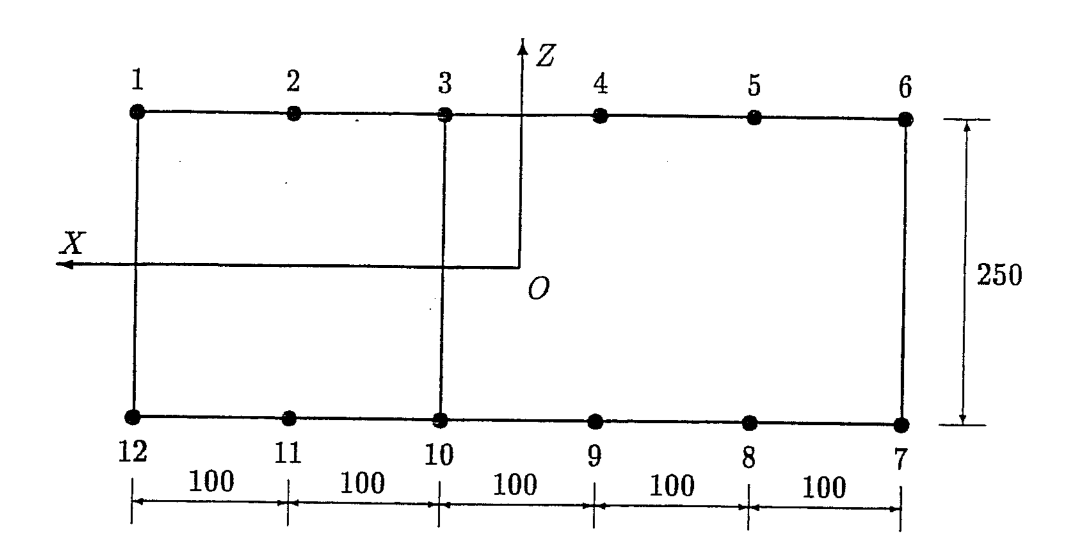


Figura 7.19: Sección a 1500 mm de la raíz del ala del ejemplo 2

Punto I,a)

Los cálculos que hay que realizar son similares a los hechos en el Ejemplo 1, salvo que en este caso, debido a la no simetría de la sección y a las cargas que actúan en ella, el eje neutro no es paralelo al eje X. Por ello, en principio se supondrá que pasa por los puntos $(250, 0)$, $(-250, -50)$, estando situado el centro de gravedad de la sección en el punto $(50, -20)$.

De acuerdo con estas hipótesis de partida, se realizan los cálculos indicados en la tabla 7.3. En la columna (6) se indican las distancias de los diferentes elementos al eje neutro asumido. El cordón de larguero más alejado es el número 6; por consiguiente, a éste le corresponderá la deformación máxima del 0.6%. Las deformaciones de los demás *booms* se obtendrán aplicando la misma proporción que para este elemento:

$$\varepsilon_a = \frac{d_l}{174.1} \times (-0.006)$$

Las propiedades de la sección efectiva son las que se indican en la parte inferior de la tabla.

El eje neutro es la recta para la que las deformaciones son nulas. Por consiguiente, de acuerdo con la expresión dada en el Apartado 7.4, la nueva posición del eje neutro se obtendrá mediante la ecuación:

$$\varepsilon_y = \frac{N_y}{EA} - \frac{(k_3 M_z - k_1 M_x)(X - X_g) + (k_2 M_x - k_1 M_z)(Z - Z_g)}{E} = 0$$

en donde, para las propiedades de la sección efectiva obtenidas:

$$k_1 = \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} = 0.09853 \times 10^{-8}$$

$$k_2 = \frac{I_{zz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} = 3.43100 \times 10^{-8}$$

$$k_3 = \frac{I_{xx}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} = 1.64189 \times 10^{-8}$$

Por tanto, la nueva ecuación del eje neutro es:

$$-0.291\,X + 1.559\,Z + 44.347 = 0$$

o bien:

$$-0.186\,X + Z + 28.507 = 0$$

Dado que la posición del centro de gravedad de la sección así como el eje neutro obtenidos son muy distintos de los inicialmente asumidos, será necesario realizar nuevas iteraciones. En ellas siempre se ha de suponer que la deformación máxima de cualquier cordón de largero es del 0.6% en compresión. En las tablas 7.4 y 7.5 se incluyen los cálculos de las dos nuevas iteraciones que son necesarias para que converja el proceso.

El factor de reserva será un valor RF tal que multiplicado por las cargas que actúan sobre el ala, da lugar a que se produzca el fallo de un cordón de largero; es decir, de acuerdo con la figura 7.5, se produzca en él una deformación del 0.6% a compresión. De acuerdo con los cálculos realizados, el cordón de largero más cargado es el número 6. Por consiguiente:

$$\varepsilon_y = \frac{RF \cdot N_y}{EA} - RF \cdot \frac{(k_3 M_z - k_1 M_x)(X_6 - X_g) + (k_2 M_x - k_1 M_z)(Z_6 - Z_g)}{E} = -0.006$$

en donde, para las propiedades de la sección efectiva obtenidas en la última iteración (ver tabla 7.5):

$$k_1 = \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} = 0.13758 \times 10^{-8}$$

$$k_2 = \frac{I_{zz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} = 3.27320 \times 10^{-8}$$

$$k_3 = \frac{I_{xx}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} = 1.60768 \times 10^{-8}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior:

$$-RF \cdot [-0.30306\,(-250 - 14.0) + 1.49358\,(125 + 21.5)] = 70000 \times (-0.006)$$

luego:

$$RF = 1.41$$

ITERACION 1												
Posición asumida para el c.d.g.: $X_g = +50.0$ $Z_g = -20.0$. Eje neutro asumido: -0.100X +1.000Z +25.000 = 0												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Larguerillo		A_l	X	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot A$
Nº	Tipo	(mm²)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm²)	(N/mm²)	(mm²)	(mm²)	(σ_r/σ_l)	(mm
1	L2	150.0	250.0	125.0	124.4	-4.286	-300.0	-284.5	32.5	182.5	0.948	173
2	L1	90.0	150.0	125.0	134.3	-4.629	-324.0	-259.4	40.2	130.2	0.801	104
3	L2	150.0	50.0	125.0	144.3	-4.971	-348.0	-309.9	49.6	199.6	0.890	177
4	L1	90.0	-50.0	125.0	154.2	-5.314	-372.0	-260.0	40.2	130.2	0.699	91
5	L1	90.0	-150.0	125.0	164.2	-5.657	-396.0	-260.0	40.2	130.2	0.657	85
6	L2	150.0	-250.0	125.0	174.1	-6.000	-420.0	-325.0	30.4	180.4	0.774	139
7	L2	150.0	-250.0	-125.0	-74.6	2.571	180.0	180.0	81.7	231.7	1.000	231
8	L3	70.0	-150.0	-125.0	-84.6	2.914	204.0	204.0	80.0	150.0	1.000	150
9	L3	70.0	-50.0	-125.0	-94.5	3.257	228.0	228.0	80.0	150.0	1.000	150
10	L2	150.0	50.0	-125.0	-104.5	3.600	252.0	252.0	121.7	271.7	1.000	271
11	L3	70.0	150.0	-125.0	-114.4	3.943	276.0	276.0	80.0	150.0	1.000	150
12	L2	150.0	250.0	-125.0	-124.4	4.286	300.0	300.0	81.7	231.7	1.000	231

Area = 1956. mm²; X_g = 11.0 mm; Z_g = -26.4 mm

I_{xx} = 2.9196370E+07 mm⁴; I_{zz} = 6.1010492E+07 mm⁴; I_{xz} = 1752025. mm⁴

Eje neutro obtenido: -0.186X +1.000Z +28.507 = 0

Tabla 7.3: Cálculos correspondientes a la 1ª iteración del ejemplo 2,I,a)

ITERACION 2												
Posición asumida para el c.d.g.: $X_g = +11.0$ $Z_g = -26.4$. Eje neutro asumido: -0.186X +1.000Z +28.507 = 0												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Larguerillo		A_l	X	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot A_l$
Nº	Tipo	(mm²)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm²)	(N/mm²)	(mm²)	(mm²)	(σ_r/σ_l)	(mm²
1	L2	150.0	250.0	125.0	105.1	-3.205	-224.3	-224.0	36.7	186.7	0.998	186.
2	L1	90.0	150.0	125.0	123.4	-3.764	-263.5	-246.6	41.2	131.2	0.936	122.
3	L2	150.0	50.0	125.0	141.7	-4.323	-302.6	-286.2	51.6	201.6	0.946	190.
4	L1	90.0	-50.0	125.0	160.1	-4.882	-341.7	-259.9	40.2	130.2	0.761	99.
5	L1	90.0	-150.0	125.0	178.4	-5.441	-380.9	-260.0	40.2	130.2	0.683	88.
6	L2	150.0	-250.0	125.0	196.7	-6.000	-420.0	-325.0	30.4	180.4	0.774	139.
7	L2	150.0	-250.0	-125.0	-49.0	1.496	104.7	104.7	81.7	231.7	1.000	231.
8	L3	70.0	-150.0	-125.0	-67.4	2.055	143.8	143.8	80.0	150.0	1.000	150.
9	L3	70.0	-50.0	-125.0	-85.7	2.614	183.0	183.0	80.0	150.0	1.000	150.
10	L2	150.0	50.0	-125.0	-104.0	3.173	222.1	222.1	121.7	271.7	1.000	271.
11	L3	70.0	150.0	-125.0	-122.4	3.732	261.2	261.2	80.0	150.0	1.000	150.
12	L2	150.0	250.0	-125.0	-140.7	4.291	300.3	300.3	81.7	231.7	1.000	231.

Area = 2012. mm²; X_g = 13.6 mm; Z_g = -22.2 mm

I_{xx} = 3.0449562E+07 mm⁴; I_{zz} = 6.2249640E+07 mm⁴; I_{xz} = 2519804. mm⁴

Eje neutro obtenido: -0.201X +1.000Z +24.956 = 0

Tabla 7.4: Cálculos correspondientes a la 2ª iteración del ejemplo 2,I,a)

ITERACION 3												
Posición asumida para el c.d.g.: X_g = +13.6 Z_g = -22.2. Eje neutro asumido: -0.201X +1.000Z +24.956 = 0												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Larguerillo		A_l	X	Z	d_l	$\epsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot A$
Nº	Tipo	(mm^2)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm^2)	(N/mm^2)	(mm^2)	(mm^2)	(σ_r/σ_l)	(mm
1	L2	150.0	250.0	125.0	97.8	-2.990	-209.3	-209.3	37.9	187.9	1.000	187
2	L1	90.0	150.0	125.0	117.5	-3.592	-251.4	-241.1	41.7	131.7	0.959	126
3	L2	150.0	50.0	125.0	137.2	-4.194	-293.6	-280.4	52.1	202.1	0.955	193.
4	L1	90.0	-50.0	125.0	156.9	-4.796	-335.7	-259.8	40.2	130.2	0.774	100.
5	L1	90.0	-150.0	125.0	176.6	-5.398	-377.9	-260.0	40.2	130.2	0.688	89.
6	L2	150.0	-250.0	125.0	196.2	-6.000	-420.0	-325.0	30.4	180.4	0.774	139.
7	L2	150.0	-250.0	-125.0	-48.9	1.494	104.6	104.6	81.7	231.7	1.000	231.
8	L3	70.0	-150.0	-125.0	-68.6	2.096	146.7	146.7	80.0	150.0	1.000	150.
9	L3	70.0	-50.0	-125.0	-88.2	2.698	188.9	188.9	80.0	150.0	1.000	150.
10	L2	150.0	50.0	-125.0	-107.9	3.300	231.0	231.0	121.7	271.7	1.000	271.
11	L3	70.0	150.0	-125.0	-127.6	3.902	273.1	273.1	80.0	150.0	1.000	150.
12	L2	150.0	250.0	-125.0	-147.3	4.504	315.3	315.2	81.7	231.7	1.000	231.

Area = 2022. mm^2; X_g = 14.0 mm; Z_g = -21.5 mm

I_{xx} = 3.0661398E+07 mm^4; I_{zz} = 6.2425852E+07 mm^4; I_{xz} = 2623922. mm^4

Eje neutro obtenido: -0.203X +1.000Z +24.331 = 0

Tabla 7.5: Cálculos correspondientes a la 3ª iteración del ejemplo 2,I,a)

Punto I,b)

En las tablas 7.6 a 7.8 se indican los cálculos realizados en este caso. De acuerdo con las curvas de la figura 7.6, el fallo se producirá cuando la deformación longitudinal máxima en el cordón de algún larguero sea:

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_l}{E} = \frac{-325}{70000} = -4.643 \times 10^{-3}$$

En este caso también es necesario realizar tres iteraciones para que converja el proceso. De acuerdo con los resultados de la tercera iteración, el factor de reserva se obtiene a partir de los datos del *boom* 6:

$$\varepsilon_y = \frac{RF \cdot N_y}{EA} - RF \cdot \frac{(k_3 M_z - k_1 M_x)(X - X_g) + (k_2 M_x - k_1 M_z)(Z - Z_g)}{E} = -4.643 \times 10^{-3}$$

en donde:

$$k_1 = \frac{I_{xz}}{I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2} = 0.03153 \times 10^{-8}$$

$$k_2 = \frac{I_{zz}}{I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2} = 3.01807 \times 10^{-8}$$

$$k_3 = \frac{I_{xx}}{I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2} = 1.50597 \times 10^{-8}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior:

$$-RF \cdot [-0.24008\,(-250 - 7.5) + 1.36286\,(125 + 13.1)] = 70000 \times (-4.643 \times 10^{-3})$$

luego:

$$RF = 1.30$$

Como se puede comprobar, el resultado es más conservativo que el obtenido utilizando las curvas reales de esfuerzos-deformaciones a compresión. Esto es debido a que en este caso se está limitando la deformación máxima a un valor menor que si se utilizan las curvas reales, y en consecuencia las deformaciones de todos los elementos son también menores. En el ejemplo 1, los resultados obtenidos al utilizar las curvas $\sigma - \varepsilon$ simplificadas eran similares a los correspondientes a las reales debido a que, al estar todos los elementos del revestimiento superior a la misma distancia del eje neutro, las deformaciones de todos ellos eran iguales, de modo que era indiferente, al utilizar las curvas simplificadas, suponer que la deformación máxima era del -0.4643% o cualquier otro valor mayor, pues a partir de este valor los esfuerzos en los elementos se mantienen constantes. Sin embargo, en el caso actual, al estar cada elemento a una distancia distinta del eje neutro, las deformaciones son distintas, por lo que los esfuerzos obtenidos en cada elemento son distintos dependiendo de la deformación máxima asumida. Este es un inconveniente de utilizar las curvas simplificadas: el resultado será conservativo a menos que se conozca la deformación máxima que se puede alcanzar. Si se conociera este valor se obtendría un factor de reserva muy parecido utilizando las curvas reales o las simplificadas.

ITERACION 1												
Posición asumida para el c.d.g.: X_g = +50.0 Z_g = -20.0. Eje neutro asumido: -0.100X +1.000Z +25.000 = 0												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Larguerillo		A_l	X	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot A$
Nº	Tipo	(mm²)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm²)	(N/mm²)	(mm²)	(mm²)	(σ_r/σ_l)	(mm
1	L2	150.0	250.0	125.0	124.4	-3.316	-232.2	-232.1	36.0	186.0	1.000	18
2	L1	90.0	150.0	125.0	134.3	-3.582	-250.7	-250.7	40.9	130.9	1.000	13
3	L2	150.0	50.0	125.0	144.3	-3.847	-269.3	-269.3	53.2	203.2	1.000	20
4	L1	90.0	-50.0	125.0	154.2	-4.112	-287.9	-260.0	40.2	130.2	0.903	11
5	L1	90.0	-150.0	125.0	164.2	-4.378	-306.4	-260.0	40.2	130.2	0.848	11
6	L2	150.0	-250.0	125.0	174.1	-4.643	-325.0	-325.0	30.4	180.4	1.000	18
7	L2	150.0	-250.0	-125.0	-74.6	1.990	139.3	139.3	81.7	231.7	1.000	23
8	L3	70.0	-150.0	-125.0	-84.6	2.255	157.9	157.9	80.0	150.0	1.000	15
9	L3	70.0	-50.0	-125.0	-94.5	2.520	176.4	176.4	80.0	150.0	1.000	15
10	L2	150.0	50.0	-125.0	-104.5	2.786	195.0	195.0	121.7	271.7	1.000	27
11	L3	70.0	150.0	-125.0	-114.4	3.051	213.6	213.6	80.0	150.0	1.000	15
12	L2	150.0	250.0	-125.0	-124.4	3.316	232.2	232.2	81.7	231.7	1.000	23

Area = 2114. mm²; X_g = 7.0 mm; Z_g = -15.2 mm

I_{xx} = 3.2537618E+07 mm⁴; I_{zz} = 6.5793364E+07 mm⁴; I_{xz} = 557595.6 mm⁴

Eje neutro obtenido: -0.173X +1.000Z +16.381 = 0

Tabla 7.6: Cálculos correspondientes a la 1ª iteración del ejemplo 2,I,b)

ITERACION 2												
Posición asumida para el c.d.g.: X_g = +7.0 Z_g = -15.2. Eje neutro asumido: -0.173X +1.000Z +16.381 = 0												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Larguerillo		A_l	X	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot A$
Nº	Tipo	(mm²)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm²)	(N/mm²)	(mm²)	(mm²)	(σ_r/σ_l)	(mm
1	L2	150.0	250.0	125.0	96.7	-2.469	-172.9	-172.8	41.7	191.7	1.000	191
2	L1	90.0	150.0	125.0	113.8	-2.904	-203.3	-203.3	45.4	135.4	1.000	135
3	L2	150.0	50.0	125.0	130.8	-3.339	-233.7	-233.7	57.1	207.1	1.000	207
4	L1	90.0	-50.0	125.0	147.8	-3.774	-264.1	-260.0	40.2	130.2	0.984	128
5	L1	90.0	-150.0	125.0	164.9	-4.208	-294.6	-260.0	40.2	130.2	0.883	114
6	L2	150.0	-250.0	125.0	181.9	-4.643	-325.0	-325.0	30.4	180.4	1.000	180
7	L2	150.0	-250.0	-125.0	-64.5	1.645	115.2	115.2	81.7	231.7	1.000	231
8	L3	70.0	-150.0	-125.0	-81.5	2.080	145.6	145.6	80.0	150.0	1.000	150
9	L3	70.0	-50.0	-125.0	-98.5	2.515	176.0	176.0	80.0	150.0	1.000	150
10	L2	150.0	50.0	-125.0	-115.5	2.949	206.5	206.5	121.7	271.7	1.000	271
11	L3	70.0	150.0	-125.0	-132.6	3.384	236.9	236.9	80.0	150.0	1.000	150
12	L2	150.0	250.0	-125.0	-149.6	3.819	267.3	267.3	81.7	231.7	1.000	231

Area = 2143. mm²; X_g = 7.4 mm; Z_g = -13.3 mm

I_{xx} = 3.3102574E+07 mm⁴; I_{zz} = 6.6374456E+07 mm⁴; I_{xz} = 682709.6 mm⁴

Eje neutro obtenido: -0.176X +1.000Z +14.570 = 0

Tabla 7.7: Cálculos correspondientes a la 2ª iteración del ejemplo 2,I,b)

ITERACION 3												
Posición asumida para el c.d.g.: $X_g = +7.4$ $Z_g = -13.3$. Eje neutro asumido: -0.176X +1.000Z +14.570 = 0												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
Larguerillo		A_l	X	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot$
N°	Tipo	(mm^2)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm^2)	(N/mm^2)	(mm^2)	(mm^2)	(σ_r/σ_l)	(mr
1	L2	150.0	250.0	125.0	94.1	-2.418	-169.3	-169.3	42.2	192.2	1.000	19
2	L1	90.0	150.0	125.0	111.5	-2.863	-200.4	-200.4	45.7	135.7	1.000	13
3	L2	150.0	50.0	125.0	128.8	-3.308	-231.6	-231.6	57.3	207.3	1.000	20
4	L1	90.0	-50.0	125.0	146.1	-3.753	-262.7	-260.0	40.2	130.2	0.990	12
5	L1	90.0	-150.0	125.0	163.4	-4.198	-293.9	-260.0	40.2	130.2	0.885	11
6	L2	150.0	-250.0	125.0	180.8	-4.643	-325.0	-325.0	30.4	180.4	1.000	18
7	L2	150.0	-250.0	-125.0	-65.4	1.681	117.7	117.7	81.7	231.7	1.000	23
8	L3	70.0	-150.0	-125.0	-82.8	2.126	148.8	148.8	80.0	150.0	1.000	15
9	L3	70.0	-50.0	-125.0	-100.1	2.571	180.0	180.0	80.0	150.0	1.000	15
10	L2	150.0	50.0	-125.0	-117.4	3.016	211.1	211.1	121.7	271.7	1.000	27
11	L3	70.0	150.0	-125.0	-134.7	3.461	242.3	242.3	80.0	150.0	1.000	15
12	L2	150.0	250.0	-125.0	-152.1	3.906	273.4	273.4	81.7	231.7	1.000	23

Area = 2145. mm^2; $X_g = 7.5$ mm; $Z_g = -13.1$ mm

$I_{xx} = 3.3141040\text{E}{+}07$ mm^4; $I_{zz} = 6.6416772\text{E}{+}07$ mm^4; $I_{xz} = 693765.2$ mm^4

Eje neutro obtenido: -0.176X +1.000Z +14.448 = 0

Tabla 7.8: Cálculos correspondientes a la 3ª iteración del ejemplo 2,I,b)

Punto II,a)

En este caso, el procedimiento de resolución es similar al de los casos anteriores, diferenciandose de ellos en lo siguiente:

1. Al no haber una deformación máxima, en la primera iteración es necesario asumir un valor para ella. Un valor bueno podría ser la deformación que corresponde a un esfuerzo para el que la chapa efectiva de revestimiento sea igual a $15\,t$. De la expresión de chapa efectiva se deduce el valor de este esfuerzo:

$$15t = 0.85t\sqrt{\frac{E}{\sigma}}$$

$$\sigma = \frac{E}{311.4} = \frac{70000}{311.4} = 225\ N/mm^2$$

   Este esfuerzo corresponde a una deformación del orden del ~~2%~~ 0,3% a compresión, y éste es el valor que se asumirá como máximo.

2. En las siguientes iteraciones, la deformación correspondiente a cada elemento se obtendrá a partir de las propiedades geométricas obtenidas para la sección efectiva y de las cargas aplicadas:

$$\varepsilon_y = \frac{N_y}{EA} - \frac{(k_3M_z - k_1M_x)(X - X_g) + (k_2M_x - k_1M_z)(Z - Z_g)}{E}$$

Los esfuerzos en los diferentes *booms* son los valores contenidos en la columna (9) de la tabla 7.11, que corresponde a la última iteración realizada.

ITERACION 1													
Posición asumida para el c.d.g.: X_g = +50.0 Z_g = -20.0. Eje neutro asumido: -0.100X +1.000Z +25.000 =													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
Larguerillo		A_l	X	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot$
N°	Tipo	(mm²)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm²)	(N/mm²)	(mm²)	(mm²)	(σ_r/σ_l)	(m
1	L2	150.0	250.0	125.0	124.4	-2.143	-150.0	-150.0	44.8	194.8	1.000	19
2	L1	90.0	150.0	125.0	134.3	-2.314	-162.0	-162.0	50.9	140.9	1.000	14
3	L2	150.0	50.0	125.0	144.3	-2.486	-174.0	-174.0	66.1	216.1	1.000	21
4	L1	90.0	-50.0	125.0	154.2	-2.657	-186.0	-186.0	47.5	137.5	1.000	13
5	L1	90.0	-150.0	125.0	164.2	-2.829	-198.0	-198.0	46.0	136.0	1.000	13
6	L2	150.0	-250.0	125.0	174.1	-3.000	-210.0	-210.0	37.9	187.9	1.000	18
7	L2	150.0	-250.0	-125.0	-74.6	1.286	90.0	90.0	81.7	231.7	1.000	23
8	L3	70.0	-150.0	-125.0	-84.6	1.457	102.0	102.0	80.0	150.0	1.000	15
9	L3	70.0	-50.0	-125.0	-94.5	1.629	114.0	114.0	80.0	150.0	1.000	15
10	L2	150.0	50.0	-125.0	-104.5	1.800	126.0	126.0	121.7	271.7	1.000	27
11	L3	70.0	150.0	-125.0	-114.4	1.971	138.0	138.0	80.0	150.0	1.000	15
12	L2	150.0	250.0	-125.0	-124.4	2.143	150.0	150.0	81.7	231.7	1.000	23

Area = 2198. mm²; X_g = 5.7 mm; Z_g = -9.8 mm

I_{xx} = 3.4137516E+07 mm⁴; I_{zz} = 6.7723184E+07 mm⁴; I_{xz} = 160988.7 mm⁴

Eje neutro obtenido: -0.170X +1.000Z +10.734 = 0

Tabla 7.9: Cálculos correspondientes a la 1ª iteración del ejemplo 2,II,a)

ITERACION 2													
Posición asumida para el c.d.g.: X_g = +5.7 Z_g = -9.8. Eje neutro asumido: -0.170X +1.000Z +10.734 = 0													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
Larguerillo		A_l	X	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot$
N°	Tipo	(mm²)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm²)	(N/mm²)	(mm²)	(mm²)	(σ_r/σ_l)	(mm
1	L2	150.0	250.0	125.0	91.8	-1.756	-122.9	-122.9	49.5	199.5	1.000	19
2	L1	90.0	150.0	125.0	108.6	-2.077	-145.4	-145.4	53.7	143.7	1.000	14
3	L2	150.0	50.0	125.0	125.4	-2.398	-167.8	-167.8	67.4	217.4	1.000	21
4	L1	90.0	-50.0	125.0	142.2	-2.719	-190.3	-190.3	47.0	137.0	1.000	13
5	L1	90.0	-150.0	125.0	159.0	-3.039	-212.8	-212.5	44.4	134.4	0.999	13
6	L2	150.0	-250.0	125.0	175.8	-3.360	-235.2	-234.1	35.9	185.9	0.995	18
7	L2	150.0	-250.0	-125.0	-70.7	1.351	94.6	94.6	81.7	231.7	1.000	23
8	L3	70.0	-150.0	-125.0	-87.5	1.672	117.1	117.1	80.0	150.0	1.000	15
9	L3	70.0	-50.0	-125.0	-104.3	1.993	139.5	139.5	80.0	150.0	1.000	15
10	L2	150.0	50.0	-125.0	-121.0	2.314	162.0	162.0	121.7	271.7	1.000	27
11	L3	70.0	150.0	-125.0	-137.8	2.635	184.4	184.4	80.0	150.0	1.000	15
12	L2	150.0	250.0	-125.0	-154.6	2.956	206.9	206.9	81.7	231.7	1.000	23

Area = 2202. mm²; X_g = 6.9 mm; Z_g = -9.6 mm

I_{xx} = 3.4201048E+07 mm⁴; I_{zz} = 6.7825840E+07 mm⁴; I_{xz} = 518861.7 mm⁴

Eje neutro obtenido: -0.175X +1.000Z +10.760 = 0

Tabla 7.10: Cálculos correspondientes a la 2ª iteración del ejemplo 2,II,a)

ITERACION 3												
Posición asumida para el c.d.g.: $X_g = +6.9$ $Z_g = -9.6$. Eje neutro asumido: -0.175X +1.000Z +10.760 = 0												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Larguerillo		A_l	X	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot A$
N^o	Tipo	(mm^2)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm^2)	(N/mm^2)	(mm^2)	(mm^2)	(σ_r/σ_l)	(mm
1	L2	150.0	250.0	125.0	90.6	-1.733	-121.3	-121.3	49.8	199.8	1.000	199
2	L1	90.0	150.0	125.0	107.8	-2.063	-144.4	-144.4	53.9	143.9	1.000	143
3	L2	150.0	50.0	125.0	125.1	-2.393	-167.5	-167.5	67.4	217.4	1.000	217
4	L1	90.0	-50.0	125.0	142.4	-2.724	-190.7	-190.7	46.9	136.9	1.000	136
5	L1	90.0	-150.0	125.0	159.6	-3.054	-213.8	-213.4	44.3	134.3	0.998	134
6	L2	150.0	-250.0	125.0	176.9	-3.384	-236.9	-235.6	35.7	185.7	0.995	184
7	L2	150.0	-250.0	-125.0	-69.4	1.327	92.9	92.9	81.7	231.7	1.000	231.
8	L3	70.0	-150.0	-125.0	-86.6	1.657	116.0	116.0	80.0	150.0	1.000	150.
9	L3	70.0	-50.0	-125.0	-103.9	1.988	139.1	139.1	80.0	150.0	1.000	150.
10	L2	150.0	50.0	-125.0	-121.2	2.318	162.3	162.3	121.7	271.7	1.000	271.
11	L3	70.0	150.0	-125.0	-138.4	2.649	185.4	185.4	80.0	150.0	1.000	150.
12	L2	150.0	250.0	-125.0	-155.7	2.979	208.5	208.5	81.7	231.7	1.000	231.

$$\text{Area} = 2202.\ \text{mm}^2; \qquad X_g = 7.0\ \text{mm}; \qquad Z_g = -9.5\ \text{mm}$$

$$I_{xx} = 3.4203900\text{E}{+}07\ \text{mm}^4; \quad I_{zz} = 6.7831224\text{E}{+}07\ \text{mm}^4; \quad I_{xz} = 544299.9\ \text{mm}^4$$

Eje neutro obtenido: -0.176X +1.000Z +10.768 = 0

Tabla 7.11: Cálculos correspondientes a la 3ª iteración del ejemplo 2,II,a)

Punto II,b)

Este caso se resolverá igual que el II,a), pero utilizando las curvas $\sigma - \varepsilon$ a compresión simplificadas de la figura 7.6 en lugar de las reales de la figura 7.5 (ver tablas 7.12 a 7.14).

ITERACION 1												
Posición asumida para el c.d.g.: X_g = +50.0 Z_g = -20.0. Eje neutro asumido: -0.100X +1.000Z +25.000 = 0												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Larguerillo		A_l	X	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot A$
N°	Tipo	(mm²)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm²)	(N/mm²)	(mm²)	(mm²)	(σ_r/σ_l)	(mm
1	L2	150.0	250.0	125.0	124.4	-2.143	-150.0	-150.0	44.8	194.8	1.000	194
2	L1	90.0	150.0	125.0	134.3	-2.314	-162.0	-162.0	50.9	140.9	1.000	140
3	L2	150.0	50.0	125.0	144.3	-2.486	-174.0	-174.0	66.2	216.2	1.000	216
4	L1	90.0	-50.0	125.0	154.2	-2.657	-186.0	-186.0	47.5	137.5	1.000	137
5	L1	90.0	-150.0	125.0	164.2	-2.829	-198.0	-198.0	46.0	136.0	1.000	136
6	L2	150.0	-250.0	125.0	174.1	-3.000	-210.0	-210.0	37.9	187.9	1.000	187
7	L2	150.0	-250.0	-125.0	-74.6	1.286	90.0	90.0	81.7	231.7	1.000	231
8	L3	70.0	-150.0	-125.0	-84.6	1.457	102.0	102.0	80.0	150.0	1.000	150
9	L3	70.0	-50.0	-125.0	-94.5	1.629	114.0	114.0	80.0	150.0	1.000	150
10	L2	150.0	50.0	-125.0	-104.5	1.800	126.0	126.0	121.7	271.7	1.000	271
11	L3	70.0	150.0	-125.0	-114.4	1.971	138.0	138.0	80.0	150.0	1.000	150
12	L2	150.0	250.0	-125.0	-124.4	2.143	150.0	150.0	81.7	231.7	1.000	231

Area = 2198. mm²; X_g = 5.7 mm; Z_g = -9.8 mm

I_{xx} = 3.4137704E+07 mm⁴; I_{zz} = 6.7722936E+07 mm⁴; I_{xz} = 160884.8 mm⁴

Eje neutro obtenido: -0.170X +1.000Z +10.734 = 0

Tabla 7.12: Cálculos correspondientes a la 1ª iteración del ejemplo 2,II,b)

ITERACION 2												
Posición asumida para el c.d.g.: X_g = +5.7 Z_g = -9.8. Eje neutro asumido: -0.170X +1.000Z +10.734 = 0												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Larguerillo		A_l	X	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot A$
N°	Tipo	(mm²)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm²)	(N/mm²)	(mm²)	(mm²)	(σ_r/σ_l)	(mm
1	L2	150.0	250.0	125.0	91.8	-1.756	-122.9	-122.9	49.5	199.5	1.000	199
2	L1	90.0	150.0	125.0	108.6	-2.077	-145.4	-145.4	53.7	143.7	1.000	143
3	L2	150.0	50.0	125.0	125.4	-2.398	-167.8	-167.8	67.4	217.4	1.000	217
4	L1	90.0	-50.0	125.0	142.2	-2.719	-190.3	-190.3	46.9	136.9	1.000	137
5	L1	90.0	-150.0	125.0	159.0	-3.039	-212.8	-212.8	44.4	134.4	1.000	134
6	L2	150.0	-250.0	125.0	175.8	-3.360	-235.2	-235.2	35.8	185.8	1.000	185.
7	L2	150.0	-250.0	-125.0	-70.7	1.351	94.6	94.6	81.7	231.7	1.000	231.
8	L3	70.0	-150.0	-125.0	-87.5	1.672	117.1	117.1	80.0	150.0	1.000	150.
9	L3	70.0	-50.0	-125.0	-104.3	1.993	139.5	139.5	80.0	150.0	1.000	150.
10	L2	150.0	50.0	-125.0	-121.0	2.314	162.0	162.0	121.7	271.7	1.000	271.
11	L3	70.0	150.0	-125.0	-137.8	2.635	184.4	184.4	80.0	150.0	1.000	150.
12	L2	150.0	250.0	-125.0	-154.6	2.956	206.9	206.9	81.7	231.7	1.000	231.

Area = 2203. mm²; X_g = 6.8 mm; Z_g = -9.5 mm

I_{xx} = 3.4218796E+07 mm⁴; I_{zz} = 6.7884136E+07 mm⁴; I_{xz} = 487043.7 mm⁴

Eje neutro obtenido: -0.175X +1.000Z +10.678 = 0

Tabla 7.13: Cálculos correspondientes a la 2ª iteración del ejemplo 2,II,b)

ITERACION 3													
Posición asumida para el c.d.g.: $X_g = +6.8$ $Z_g = -9.5$. Eje neutro asumido: -0.175X +1.000Z +10.678 = 0													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
Larguerillo		A_l	X	Z	d_l	$\epsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot$
N^o	Tipo	(mm^2)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm^2)	(N/mm^2)	(mm^2)	(mm^2)	(σ_r/σ_l)	(mn
1	L2	150.0	250.0	125.0	90.6	-1.732	-121.3	-121.3	49.8	199.8	1.000	19
2	L1	90.0	150.0	125.0	107.8	-2.062	-144.3	-144.3	53.9	143.9	1.000	14
3	L2	150.0	50.0	125.0	125.0	-2.391	-167.3	-167.3	67.5	217.5	1.000	21
4	L1	90.0	-50.0	125.0	142.3	-2.720	-190.4	-190.4	46.9	136.9	1.000	13
5	L1	90.0	-150.0	125.0	159.5	-3.049	-213.4	-213.5	44.3	134.3	1.000	13
6	L2	150.0	-250.0	125.0	176.7	-3.378	-236.5	-236.5	35.7	185.7	1.000	18
7	L2	150.0	-250.0	-125.0	-69.6	1.330	93.1	93.1	81.7	231.7	1.000	23
8	L3	70.0	-150.0	-125.0	-86.8	1.659	116.2	116.2	80.0	150.0	1.000	15
9	L3	70.0	-50.0	-125.0	-104.0	1.988	139.2	139.2	80.0	150.0	1.000	15
10	L2	150.0	50.0	-125.0	-121.2	2.318	162.2	162.2	121.7	271.7	1.000	27
11	L3	70.0	150.0	-125.0	-138.4	2.647	185.3	185.3	80.0	150.0	1.000	15
12	L2	150.0	250.0	-125.0	-155.7	2.976	208.3	208.3	81.7	231.7	1.000	23

Area = 2203. mm^2; $X_g = 6.8$ mm; $Z_g = -9.5$ mm

$I_{xx} = 3.4227004\text{E}{+}07$ mm^4; $I_{zz} = 6.7900152\text{E}{+}07$ mm^4; $I_{xz} = 507215.5$ mm^4

Eje neutro obtenido: -0.175X +1.000Z +10.664 = 0

Tabla 7.14: Cálculos correspondientes a la 3ª iteración del ejemplo 2,II,b)

Resolución de punto III

Los flujos de cortadura se determinarán para la sección efectiva obtenida en el Punto II,a).

Antes de determinar los flujos de cortadura en los paneles es necesario calcular las componentes según los ejes X y Z de las cargas en los *booms*. Estas se calcularán mediante las expresiones:

$$P_x = \frac{\delta x}{\delta y} P_y \qquad P_z = \frac{\delta z}{\delta y} P_y$$

En este caso:

$$\frac{\delta x}{\delta y} = 0$$

Revestimiento superior:

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{100 - 150}{3000} = -0.01667$$

Revestimiento inferior:

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{-100 - (-150)}{3000} = 0.01667$$

Los valores de P_y se obtienen a partir de los esfuerzos y áreas indicados en la tabla 7.11:

$$P_y = cA_b\sigma_l = A_b\sigma_r$$

En la tabla 7.15 se incluyen los cálculos necesarios para determinar los valores de P_x y P_z.

Boom	$\delta x/\delta y$	$\delta z/\delta y$	P_y	P_x	P_z
1	0.0	−0.01667	−24237	0	404
2	0.0	−0.01667	−20781	0	346
3	0.0	−0.01667	−36425	0	607
4	0.0	−0.01667	−26103	0	435
5	0.0	−0.01667	−28673	0	478
6	0.0	−0.01667	−43765	0	729
7	0.0	0.01667	21522	0	359
8	0.0	0.01667	17404	0	290
9	0.0	0.01667	20872	0	348
10	0.0	0.01667	44084	0	735
11	0.0	0.01667	27810	0	464
12	0.0	0.01667	48308	0	805

Tabla 7.15: Componentes de las cargas axiales en los *booms*

A continuación se determinarán los flujos de cortadura en los paneles utilizando los dos procedimientos descritos en el Apartado 7.5, es decir:

(a) A partir de las fuerzas cortantes en la sección.

(b) A partir de la variación de las fuerzas axiales en los *booms* entre dos secciones del fuselaje.

Cálculo a partir de las fuerzas cortantes en la sección

En primer lugar es necesario calcular las fuerzas cortantes resistidas por el revestimiento:

$$S_{w_x} = S_x - \sum_r P_{r_x} = -10000 - 0 = -10000\ N$$

$$S_{w_z} = S_z - \sum_r P_{r_z} = 30000 - 6000 = 24000\ N$$

A continuación se calcularán los flujos cortantes en los paneles suponiendo que la sección está abierta por los paneles entre los *booms* 1-2 y 3-4:

$$q_{b_{r,r+1}} = q_{b_{r-1,r}} - [(k_3 S_{w_x} - k_1 S_{w_z})(X_r - X_g) + (k_2 S_{w_z} - k_1 S_{w_x})(Z_r - Z_g)]cA_{b_r}$$

Los valores de k_1, k_2 y k_3 se obtienen a partir de las propiedades de la sección efectiva. De la tabla 7.11:

$$k_1 = \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} = 0.02346 \times 10^{-8}$$

$$k_2 = \frac{I_{zz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} = 2.92401 \times 10^{-8}$$

$$k_3 = \frac{I_{xx}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} = 1.47444 \times 10^{-8}$$

Luego:

$$q_{b_{r,r+1}} = q_{b_{r-1,r}} + [1.53075 \times 10^{-4}(X_r - 7.0) - 7.04110 \times 10^{-4}(Z_r + 9.5)]cA_{b_r}$$

$$q_{b_{1,2}} = 0$$

$$q_{b_{2,3}} = q_{b_{1,2}} + [1.53075 \times 10^{-4}(X_2 - 7.0) - 7.04110 \times 10^{-4}(Z_2 + 9.5)]cA_{b_2} = -10.48$$

$$q_{b_{3,4}} = 0$$

$$q_{b_{3,10}} = q_{b_{2,3}} - q_{b_{3,4}} + [1.53075 \times 10^{-4}(X_3 - 7.0) - 7.04110 \times 10^{-4}(Z_3 + 9.5)]cA_{b_3} = -29.64$$

$$q_{b_{4,5}} = q_{b_{3,4}} + [1.53075 \times 10^{-4}(X_4 - 7.0) - 7.04110 \times 10^{-4}(Z_4 + 9.5)]cA_{b_4} = -14.16$$

$$q_{b_{5,6}} = q_{b_{4,5}} + [1.53075 \times 10^{-4}(X_5 - 7.0) - 7.04110 \times 10^{-4}(Z_5 + 9.5)]cA_{b_5} = -30.08$$

$$q_{b_{6,7}} = q_{b_{5,6}} + [1.53075 \times 10^{-4}(X_6 - 7.0) - 7.04110 \times 10^{-4}(Z_6 + 9.5)]cA_{b_6} = -54.84$$

$$q_{b_{7,8}} = q_{b_{6,7}} + [1.53075 \times 10^{-4}(X_7 - 7.0) - 7.04110 \times 10^{-4}(Z_7 + 9.5)]cA_{b_7} = -45.11$$

$$q_{b_{8,9}} = q_{b_{7,8}} + [1.53075 \times 10^{-4}(X_8 - 7.0) - 7.04110 \times 10^{-4}(Z_8 + 9.5)]cA_{b_8} = -36.52$$

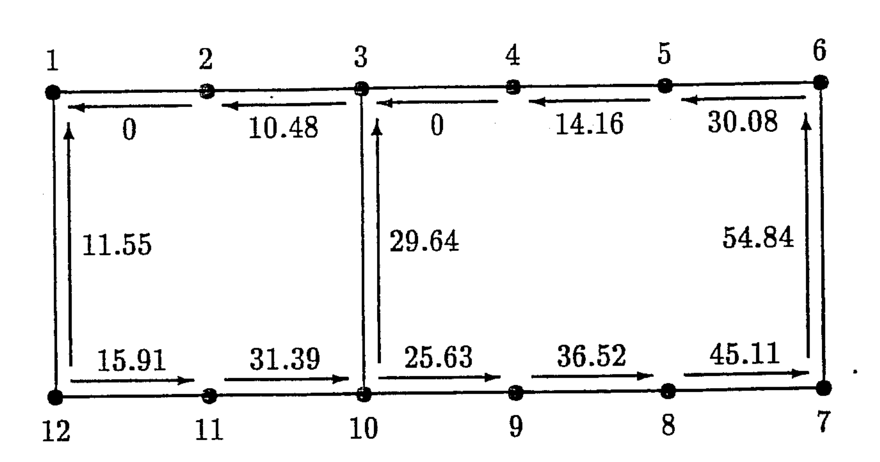


Figura 7.20: Flujos de cortadura considerando la sección abierta [procedimiento a)]

$$q_{b_{9,10}} = q_{b_{8,9}} + [1.53075 \times 10^{-4}(X_9 - 7.0) - 7.04110 \times 10^{-4}(Z_9 + 9.5)]cA_{b_9} = -25.63$$

$$q_{b_{10,11}} = q_{b_{3,10}} + q_{b_{9,10}} + [1.53075 \times 10^{-4}(X_{10} - 7.0) - 7.04110 \times 10^{-4}(Z_{10} + 9.5)]cA_{b_{10}} = -31.39$$

$$q_{b_{11,12}} = q_{b_{10,11}} + [1.53075 \times 10^{-4}(X_{11} - 7.0) - 7.04110 \times 10^{-4}(Z_{11} + 9.5)]cA_{b_{11}} = -15.91$$

$$q_{b_{12,1}} = q_{b_{11,12}} + [1.53075 \times 10^{-4}(X_{12} - 7.0) - 7.04110 \times 10^{-4}(Z_{12} + 9.5)]cA_{b_{12}} = 11.55$$

En la figura 7.20 se representan estos flujos. Nótese que las resultantes de los flujos en direcciones X y Z son aproximadamente iguales a las fuerzas cortantes soportadas por el revestimiento.

Los flujos totales se determinarán sumando a los calculados anteriormente los flujos incógnita en cada celda, q_I y q_{II}. Si se supone que los dos flujos incógnita tienen las direcciones contrarias de las agujas del reloj, el flujo total en cada uno de los tramos de la sección será igual a:

$$\begin{aligned}
q_{1,2} &= -q_I \\
q_{2,3} &= q_{b_{2,3}} - q_I \\
q_{3,4} &= -q_{II} \\
q_{4,5} &= q_{b_{4,5}} - q_{II} \\
q_{5,6} &= q_{b_{5,6}} - q_{II} \\
q_{6,7} &= q_{b_{6,7}} - q_{II} \\
q_{7,8} &= q_{b_{7,8}} - q_{II} \\
q_{8,9} &= q_{b_{8,9}} - q_{II} \\
q_{9,10} &= q_{b_{9,10}} - q_{II} \\
q_{10,11} &= q_{b_{10,11}} - q_I \\
q_{11,12} &= q_{b_{11,12}} - q_I \\
q_{12,1} &= q_{b_{12,1}} - q_I \\
q_{3,10} &= q_{b_{3,10}} - q_I + q_{II}
\end{aligned}$$

Para determinar el valor de q_I y q_{II}, se plantearán las dos ecuaciones siguientes:

- $M_S = M_P + M_q$
en donde los momentos se tomarán con respecto al centro geométrico de la sección, punto $O(0,0)$, y se considerarán positivos si tienen el sentido contrario de las agujas del reloj.

  - Momento de las solicitaciones:

$$M_S = M_y + S_x(Z_p - Z_o) - S_z(X_p - X_o)$$

Dado que el punto de aplicación de loas cargas es el $P(100,0)$:

$$M_S = -10000 \times (0-0) - 30000 \times (100-0) = -3 \times 10^6 \ N \cdot mm$$

  - Momento de las componentes según los ejes X y Z de las cargas en los *booms*:

$$M_P = \sum_r P_{r_x}(Z_r - Z_o) - \sum_r P_{r_z}(X_r - X_o) = 0 - 64500 = -64500 \ N \cdot mm$$

  - Momento de los flujos de cortadura que actúan en la sección:

$$M_q = 2\sum_n A_n q_{b_n} + 2A_I q_I + 2A_{II} q_{II}$$

$$A_{1,2} = A_{2,3} = A_{3,4} = A_{4,5} = A_{5,6} = \frac{100 \times 125}{2} = 6250 \ mm^2$$

$$A_{7,8} = A_{8,9} = A_{9,10} = A_{10,11} = A_{11,12} = \frac{100 \times 125}{2} = 6250 \ mm^2$$

$$A_{6,7} = A_{12,1} = \frac{250 \times 250}{2} = 31250 \ mm^2$$

$$A_{3,10} = \frac{50 \times 250}{2} = 6250 \ mm^2$$

y el área de cada celda es:

$$A_I = 200 \times 250 = 50000 \ mm^2$$

$$A_{II} = 300 \times 250 = 75000 \ mm^2$$

Por tanto, teniendo en cuenta las direcciones de los flujos q_b, queda:

$$M_q = 4951125 + 100000 q_I + 150000 q_{II}$$

Por consiguiente, la primera ecuación es:

$$-3 \times 10^6 = -64500 + 4951125 + 100000q_I + 150000q_{II}$$ ← 1ª ec.

que, simplificando, queda:

$$q_I + 1.5q_{II} = -78.866$$

- $\left(\dfrac{d\theta}{dy}\right)_I = \left(\dfrac{d\theta}{dy}\right)_{II}$

Considerando positivos los giros contrarios a las agujas del reloj, queda para la celda I:

$$\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_I = \frac{1}{2A_IG}\left(q_I\delta_I - q_{II}\delta_{II,I} + \sum_I \frac{q_{b_n}L_n}{t_n}\right)$$

siendo:

$$\delta_I = \frac{L_{1,2}}{t_{1,2}} + \frac{L_{2,3}}{t_{2,3}} + \frac{L_{3,10}}{t_{3,10}} + \frac{L_{10,11}}{t_{10,11}} + \frac{L_{11,12}}{t_{11,12}} + \frac{L_{12,1}}{t_{12,1}} = 917$$

$$\delta_{II,I} = \frac{L_{3,10}}{t_{3,10}} = 250$$

$$\sum_I \frac{q_{b_n}L_n}{t_n} = -\frac{q_{b_{1,2}}L_{1,2}}{t_{1,2}} - \frac{q_{b_{2,3}}L_{2,3}}{t_{2,3}} - \frac{q_{b_{3,10}}L_{3,10}}{t_{3,10}} - \frac{q_{b_{10,11}}L_{10,11}}{t_{10,11}} - \frac{q_{b_{11,12}}L_{11,12}}{t_{11,12}} - \frac{q_{b_{12,1}}L_{12,1}}{t_{12,1}}$$

$$\sum_I \frac{q_{b_n}L_n}{t_n} = 11308$$

Por consiguiente:

$$\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_I = \frac{1}{2 \times 50000 \times G}(917q_I - 250q_{II} + 11308)$$

De forma similar, se obtiene para la celda II:

$$\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_{II} = \frac{1}{2 \times 75000 \times G}(-250q_I + 1125q_{II} + 23394)$$

Igualando ambas ecuaciones, queda:

$$3.251q_I - 3q_{II} = 12.864$$ ← 2ª ec

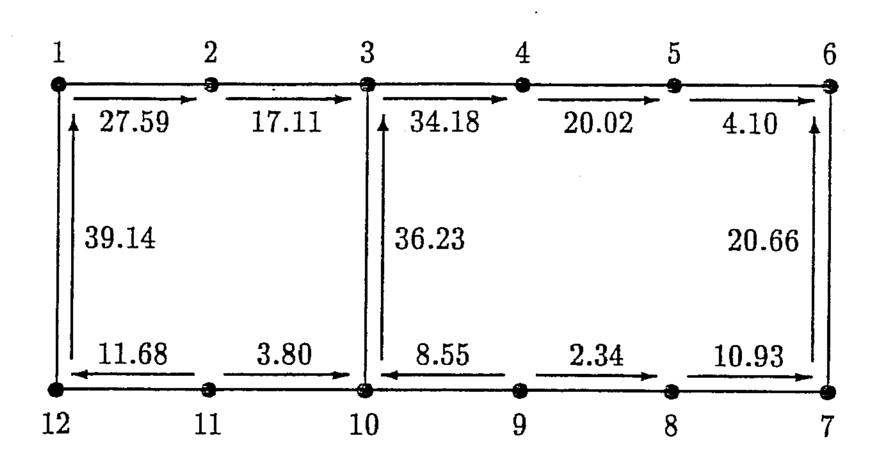


Figura 7.21: Flujos totales de cortadura [procedimiento a)]

Resolviendo el sistema obtenido queda:

$$q_I = -27.59$$

$$q_{II} = -34.18$$

Por consiguiente los flujos totales en los distintos tramos serán (ver figura 7.21):

$$
\begin{array}{lclclcl}
q_{1,2} & = & 0 & - & q_I & = & 27.59\ N/mm \\
q_{2,3} & = & q_{b_{2,3}} & - & q_I & = & 17.11\ N/mm \\
q_{3,4} & = & 0 & - & q_{II} & = & 34.18\ N/mm \\
q_{4,5} & = & q_{b_{4,5}} & - & q_{II} & = & 20.02\ N/mm \\
q_{5,6} & = & q_{b_{5,6}} & - & q_{II} & = & 4.10\ N/mm \\
q_{6,7} & = & q_{b_{6,7}} & - & q_{II} & = & -20.66\ N/mm \\
q_{7,8} & = & q_{b_{7,8}} & - & q_{II} & = & -10.93\ N/mm \\
q_{8,9} & = & q_{b_{8,9}} & - & q_{II} & = & -2.34\ N/mm \\
q_{9,10} & = & q_{b_{9,10}} & - & q_{II} & = & 8.55\ N/mm \\
q_{10,11} & = & q_{b_{10,11}} & - & q_I & = & -3.80\ N/mm \\
q_{11,12} & = & q_{b_{11,12}} & - & q_I & = & 11.68\ N/mm \\
q_{12,1} & = & q_{b_{12,1}} & - & q_I & = & 39.14\ N/mm \\
q_{3,10} & = & q_{b_{3,10}} & - & q_I + q_{II} & = & -36.23\ N/mm
\end{array}
$$

Cálculo a partir de la variación de las fuerzas axiales en los *booms*

Para determinar por este procedimiento los flujos cortantes en la sección a 1500 mm de la raíz, se calcularán en primer lugar las fuerzas axiales en una sección situada a 1980 mm de la raíz. Esta sección tiene una geometría idéntica a la de la primera, salvo que su altura es 234 mm en lugar de 250 mm. Las solicitaciones

existentes en el punto $P(100,0)$ de la sección son las siguientes:

$$\begin{aligned} S_x &= -10000 \quad N \\ S_z &= 30000 \quad N \\ M_x &= 30.6\times10^6 \quad N\cdot mm \\ M_z &= -10.2\times10^6 \quad N\cdot mm \end{aligned}$$

En las tablas 7.16 a 7.18 se incluyen los cálculos necesarios para determinar los esfuerzos existentes en los *booms* de la sección:

ITERACION 1												
Posición asumida para el c.d.g.: X_g = +50.0 Z_g = -20.0. Eje neutro asumido: -0.100X +1.000Z +25.000 = 0												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Larguerillo		A_l	X	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot$
Nº	Tipo	(mm^2)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm^2)	(N/mm^2)	(mm^2)	(mm^2)	(σ_r/σ_l)	(mm
1	L2	150.0	250.0	117.0	116.4	-2.102	-147.1	-147.1	45.2	195.2	1.000	19
2	L1	90.0	150.0	117.0	126.4	-2.281	-159.7	-159.7	51.3	141.3	1.000	14
3	L2	150.0	50.0	117.0	136.3	-2.461	-172.3	-172.3	66.5	216.5	1.000	21
4	L1	90.0	-50.0	117.0	146.3	-2.641	-184.9	-184.9	47.6	137.6	1.000	13
5	L1	90.0	-150.0	117.0	156.2	-2.820	-197.4	-197.4	46.1	136.1	1.000	13
6	L2	150.0	-250.0	117.0	166.2	-3.000	-210.0	-210.0	37.9	187.9	1.000	18
7	L2	150.0	-250.0	-117.0	-66.7	1.204	84.3	84.3	79.0	229.0	1.000	22
8	L3	70.0	-150.0	-117.0	-76.6	1.383	96.8	96.8	80.0	150.0	1.000	15
9	L3	70.0	-50.0	-117.0	-86.6	1.563	109.4	109.4	80.0	150.0	1.000	15
10	L2	150.0	50.0	-117.0	-96.5	1.743	122.0	122.0	119.0	269.0	1.000	26
11	L3	70.0	150.0	-117.0	-106.5	1.922	134.6	134.6	80.0	150.0	1:000	15
12	L2	150.0	250.0	-117.0	-116.4	2.102	147.1	147.1	79.0	229.0	1.000	22

Area = 2192. mm^2; X_g = 5.7 mm; Z_g = -8.7 mm

I_{xx} = 2.9835596E+07 mm^4; I_{zz} = 6.7420768E+07 mm^4; I_{xz} = 179699.1 mm^4

Eje neutro obtenido: -0.150X +1.000Z +9.528 = 0

Tabla 7.16: Sección a 1980 *mm* de la raíz: Cálculos correspondientes a la 1ª iteración

ITERACION 2													
Posición asumida para el c.d.g.: X_g = +5.7 Z_g = -8.7.						Eje neutro asumido: -0.150X +1.000Z +9.528 = 0							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
Larguerillo		A_l	X	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot$
N°	Tipo	(mm²)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm²)	(N/mm²)	(mm²)	(mm²)	(σ_r/σ_l)	(mı
1	L2	150.0	250.0	117.0	88.0	-1.305	-91.4	-91.4	57.4	207.4	1.000	20
2	L1	90.0	150.0	117.0	102.9	-1.525	-106.8	-106.8	62.7	152.7	1.000	15
3	L2	150.0	50.0	117.0	117.7	-1.746	-122.2	-122.2	78.9	228.9	1.000	22
4	L1	90.0	-50.0	117.0	132.5	-1.966	-137.6	-137.6	55.2	145.2	1.000	14
5	L1	90.0	-150.0	117.0	147.4	-2.186	-153.0	-153.0	52.4	142.4	1.000	14
6	L2	150.0	-250.0	117.0	162.2	-2.406	-168.4	-168.4	42.3	192.3	1.000	19
7	L2	150.0	-250.0	-117.0	-69.2	1.026	71.8	71.8	79.0	229.0	1.000	22
8	L3	70.0	-150.0	-117.0	-84.0	1.246	87.2	87.2	80.0	150.0	1.000	15
9	L3	70.0	-50.0	-117.0	-98.9	1.466	102.6	102.6	80.0	150.0	1.000	15
10	L2	150.0	50.0	-117.0	-113.7	1.686	118.0	118.0	119.0	269.0	1.000	26
11	L3	70.0	150.0	-117.0	-128.5	1.906	133.4	133.4	80.0	150.0	1.000	15
12	L2	150.0	250.0	-117.0	-143.4	2.126	148.8	148.8	79.0	229.0	1.000	22

Area = 2246. mm²; X_g = 6.9 mm; Z_g = -5.6 mm

I_{xx} = 3.0672660E+07 mm⁴; I_{zz} = 6.8870360E+07 mm⁴; I_{xz} = 503875.7 mm⁴

Eje neutro obtenido: -0.155X +1.000Z +6.702 = 0

Tabla 7.17: Sección a 1980 *mm* de la raíz: Cálculos correspondientes a la 2ª iteración

ITERACION 3												
Posición asumida para el c.d.g.: X_g = +6.9 Z_g = -5.6.						Eje neutro asumido: -0.155X +1.000Z +6.702 = 0						
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Larguerillo		A_l	X	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot A$
N°	Tipo	(mm²)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm²)	(N/mm²)	(mm²)	(mm²)	(σ_r/σ_l)	(mm
1	L2	150.0	250.0	117.0	83.8	-1.212	-84.9	-84.9	59.6	209.6	1.000	209
2	L1	90.0	150.0	117.0	99.2	-1.434	-100.4	-100.4	64.6	154.6	1.000	154
3	L2	150.0	50.0	117.0	114.6	-1.656	-116.0	-116.0	81.0	231.0	1.000	231
4	L1	90.0	-50.0	117.0	129.9	-1.879	-131.5	-131.5	56.5	146.5	1.000	146
5	L1	90.0	-150.0	117.0	145.3	-2.101	-147.0	-147.0	53.4	143.4	1.000	143
6	L2	150.0	-250.0	117.0	160.6	-2.323	-162.6	-162.6	43.0	193.0	1.000	193
7	L2	150.0	-250.0	-117.0	-70.6	1.021	71.5	71.5	79.0	229.0	1.000	229
8	L3	70.0	-150.0	-117.0	-86.0	1.243	87.0	87.0	80.0	150.0	1.000	150
9	L3	70.0	-50.0	-117.0	-101.3	1.465	102.5	102.5	80.0	150.0	1.000	150.
10	L2	150.0	50.0	-117.0	-116.7	1.687	118.1	118.1	119.0	269.0	1.000	269.
11	L3	70.0	150.0	-117.0	-132.0	1.909	133.6	133.6	80.0	150.0	1.000	150.
12	L2	150.0	250.0	-117.0	-147.4	2.131	149.2	149.2	79.0	229.0	1.000	229.

Area = 2255. mm²; X_g = 7.1 mm; Z_g = -5.1 mm

I_{xx} = 3.0811592E+07 mm⁴; I_{zz} = 6.9121384E+07 mm⁴; I_{xz} = 560895.9 mm⁴

Eje neutro obtenido: -0.156X +1.000Z +6.236 = 0

Tabla 7.18: Sección a 1980 *mm* de la raíz: Cálculos correspondientes a la 3ª iteración

En la tabla 7.19 se incluyen los cálculos necesarios para determinar los valores de $\Delta P_{r_y}/\Delta y$.

Boom	P_y (1500)	P_y (1980)	ΔP_y	$\Delta P_y/\Delta y$
1	−24237	−17786	6451	13.44
2	−20781	−15527	5254	10.95
3	−36425	−26789	9636	20.07
4	−26103	−19262	6841	14.25
5	−28673	−21087	7586	15.80
6	−43765	−31384	12381	25.79
7	21522	16365	−5157	−10.74
8	17404	13051	−4353	−9.07
9	20872	15382	−5490	−11.44
10	44084	31766	−12318	−25.66
11	27810	20045	−7765	−16.18
12	48308	34161	−14147	−29.47

Tabla 7.19: Variación de las cargas axiales en los *booms* entre las secciones a 1500 y a 1980 *mm* de la raíz

A continuación se calcularán los flujos cortantes en los paneles suponiendo que la sección está abierta por los paneles entre los *booms* 1-2 y 3-4:

$$q_{b_{r,r+1}} = q_{b_{r-1,r}} - \frac{\Delta P_{r_y}}{\Delta y}$$

$$q_{b_{1,2}} = 0$$

$$q_{b_{2,3}} = q_{b_{1,2}} - \frac{\Delta P_{2_y}}{\Delta y} = -10.95\ N/mm$$

$$q_{b_{3,4}} = 0$$

$$q_{b_{3,10}} = q_{b_{2,3}} - q_{b_{3,4}} - \frac{\Delta P_{3_y}}{\Delta y} = -31.02\ N/mm$$

$$q_{b_{4,5}} = q_{b_{3,4}} - \frac{\Delta P_{4_y}}{\Delta y} = -14.25\ N/mm$$

$$q_{b_{5,6}} = q_{b_{4,5}} - \frac{\Delta P_{5_y}}{\Delta y} = -30.05\ N/mm$$

$$q_{b_{6,7}} = q_{b_{5,6}} - \frac{\Delta P_{6_y}}{\Delta y} = -55.84\ N/mm$$

$$q_{b_{7,8}} = q_{b_{6,7}} - \frac{\Delta P_{7_y}}{\Delta y} = -45.10\ N/mm$$

$$q_{b_{8,9}} = q_{b_{7,8}} - \frac{\Delta P_{8_y}}{\Delta y} = -36.03\ N/mm$$

$$q_{b_{9,10}} = q_{b_{8,9}} - \frac{\Delta P_{9_y}}{\Delta y} = -24.59\ N/mm$$

$$q_{b_{10,11}} = q_{b_{3,10}} + q_{b_{9,10}} - \frac{\Delta P_{10_y}}{\Delta y} = -29.95\ N/mm$$

$$q_{b_{11,12}} = q_{b_{10,11}} - \frac{\Delta P_{11_y}}{\Delta y} = -13.77\ N/mm$$

$$q_{b_{12,1}} = q_{b_{11,12}} - \frac{\Delta P_{12_y}}{\Delta y} = 15.70\ N/mm$$

Los flujos obtenidos han de ser multiplicados por un factor k para tener en cuenta que los paneles tienen diferente anchura en las dos secciones. El valor del factor k es:

Paneles del revestimiento:

$$k = 1$$

Almas de los largueros:

$$k = \frac{b_{1980}}{b_{1500}} = \frac{234}{250} = 0.936$$

En consecuencia:

$$q_{b_{1,2}} = 1.000 \times 0.00 = 0.00\ N/mm$$

$$q_{b_{2,3}} = 1.000 \times (-10.95) = -10.95\ N/mm$$

$$q_{b_{3,4}} = 1.000 \times 0.00 = 0.00\ N/mm$$

$$q_{b_{3,10}} = 0.936 \times (-31.02) = -29.03\ N/mm$$

$$q_{b_{4,5}} = 1.000 \times (-14.25) = -14.25\ N/mm$$

$$q_{b_{5,6}} = 1.000 \times (-30.05) = -30.05\ N/mm$$

$$q_{b_{6,7}} = 0.936 \times (-55.84) = -52.27\ N/mm$$

$$q_{b_{7,8}} = 1.000 \times (-45.10) = -45.10\ N/mm$$

$$q_{b_{8,9}} = 1.000 \times (-36.03) = -36.03\ N/mm$$

$$q_{b_{9,10}} = 1.000 \times (-24.59) = -24.59\ N/mm$$

$$q_{b_{10,11}} = 1.000 \times (-29.95) = -29.95\ N/mm$$

$$q_{b_{11,12}} = 1.000 \times (-10.95) = -13.77\ N/mm$$

$$q_{b_{12,1}} = 0.936 \times 15.70 = 14.70\ N/mm$$

En la figura 7.22 se representan estos flujos. Nótese que las resultantes de los flujos en direcciones X y Z son aproximadamente iguales a las fuerzas cortantes soportadas por el revestimiento.

Los flujos totales se determinarán sumando a los calculados anteriormente los flujos incógnita en cada celda, q_I y q_{II}. Si se supone que los dos flujos incógnita

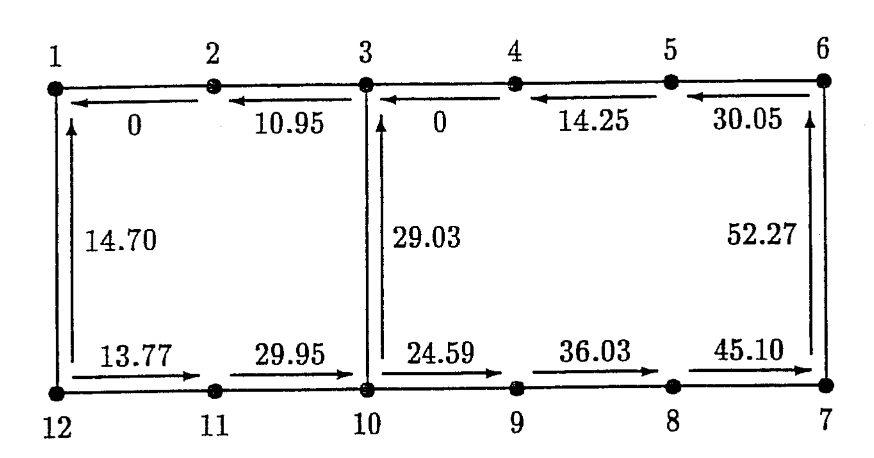


Figura 7.22: Flujos de cortadura considerando la sección abierta [procedimiento b)]

tienen las direcciones contrarias de las agujas del reloj, el flujo total en cada uno de los tramos de la sección será igual a:

$$
\begin{aligned}
q_{1,2} &= -q_I \\
q_{2,3} &= q_{b_{2,3}} - q_I \\
q_{3,4} &= -q_{II} \\
q_{4,5} &= q_{b_{4,5}} - q_{II} \\
q_{5,6} &= q_{b_{5,6}} - q_{II} \\
q_{6,7} &= q_{b_{6,7}} - q_{II} \\
q_{7,8} &= q_{b_{7,8}} - q_{II} \\
q_{8,9} &= q_{b_{8,9}} - q_{II} \\
q_{9,10} &= q_{b_{9,10}} - q_{II} \\
q_{10,11} &= q_{b_{10,11}} - q_I \\
q_{11,12} &= q_{b_{11,12}} - q_I \\
q_{12,1} &= q_{b_{12,1}} - q_I \\
q_{3,10} &= q_{b_{3,10}} - q_I + q_{II}
\end{aligned}
$$

Para determinar el valor de q_I y q_{II}, se plantearán las dos mismas ecuaciones que en el procedimiento a):

- $M_S = M_P + M_q$

  - Momento de las solicitaciones:
    Al igual que en el procedimiento a):

$$M_S = -3 \times 10^6 \ N \cdot mm$$

  - Momento de las componentes según los ejes X y Z de las cargas en los *booms*:
    Al igual que en el procedimiento a):

$$M_P = -64500 \ N \cdot mm$$

- Momento de los flujos de cortadura que actúan en la sección:
  De forma similar que en el procedimiento a), se obtiene:

$$M_q = 4542625 + 100000q_I + 150000q_{II}$$

Por consiguiente, la primera ecuación es:

$$-3 \times 10^6 = -64500 + 4542625 + 100000q_I + 150000q_{II}$$

que, simplificando, queda:

$$q_I + 1.5q_{II} = -74.78$$

- $\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_I = \left(\frac{d\theta}{dy}\right)_{II}$

De forma similar que en el procedimiento a), se obtiene:

$$\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_I = \frac{1}{2 \times 50000 \times G}(917q_I - 250q_{II} + 9960)$$

$$\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_{II} = \frac{1}{2 \times 75000 \times G}(-250q_I + 1125q_{II} + 22717)$$

Igualando ambas ecuaciones, queda:

$$3.251q_I - 3q_{II} = 15.554$$

Resolviendo el sistema obtenido queda:

$$q_I = -25.52$$

$$q_{II} = -32.84$$

Por consiguiente los flujos totales en los distintos tramos serán (ver figura 7.23):

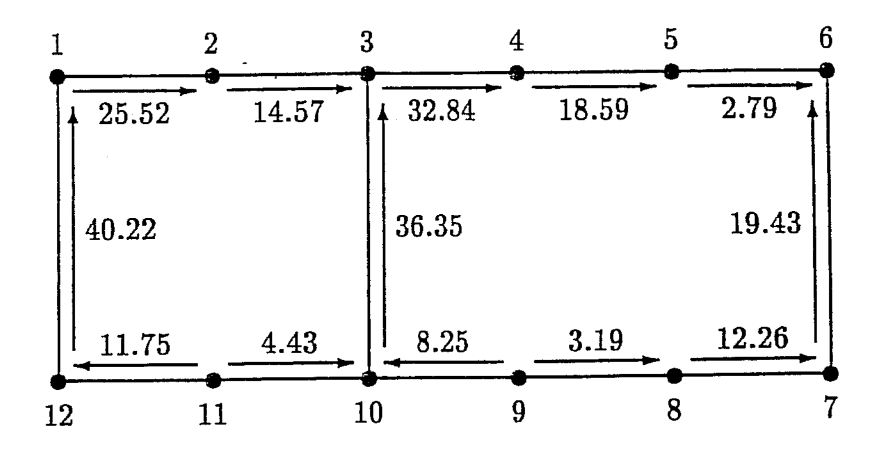


Figura 7.23: Flujos totales de cortadura [procedimiento b)]

$$
\begin{aligned}
q_{1,2} &= 0 &-\ & q_I &=\ & 25.52\ N/mm \\
q_{2,3} &= q_{b_{2,3}} &-\ & q_I &=\ & 14.57\ N/mm \\
q_{3,4} &= 0 &-\ & q_{II} &=\ & 32.84\ N/mm \\
q_{4,5} &= q_{b_{4,5}} &-\ & q_{II} &=\ & 18.59\ N/mm \\
q_{5,6} &= q_{b_{5,6}} &-\ & q_{II} &=\ & 2.79\ N/mm \\
q_{6,7} &= q_{b_{6,7}} &-\ & q_{II} &=\ & -19.43\ N/mm \\
q_{7,8} &= q_{b_{7,8}} &-\ & q_{II} &=\ & -12.26\ N/mm \\
q_{8,9} &= q_{b_{8,9}} &-\ & q_{II} &=\ & -3.19\ N/mm \\
q_{9,10} &= q_{b_{9,10}} &-\ & q_{II} &=\ & 8.25\ N/mm \\
q_{10,11} &= q_{b_{10,11}} &-\ & q_I &=\ & -4.43\ N/mm \\
q_{11,12} &= q_{b_{11,12}} &-\ & q_I &=\ & 11.75\ N/mm \\
q_{12,1} &= q_{b_{12,1}} &-\ & q_I &=\ & 40.22\ N/mm \\
q_{3,10} &= q_{b_{3,10}} &-\ & q_I + q_{II} &=\ & -36.35\ N/mm
\end{aligned}
$$

Valores que son muy parecidos a los obtenidos por el procedimiento a).

Cambios respecto al cajón del ala:

- Paneles de fuselaje son curvos ($R_{ala} >> R_{fuselaje}$) y soportan mayor carga de pandeo que los paneles rectos o de gran curva
- No hay elementos estabilizados en 2 direcciones (como ocurría en los larg
- Aquí casi siempre habrá que tener en cuenta la curvatura del fuselaje
  - Contribución de larguerillos en carga de cortadura
  - Curvidad de los paneles

Capítulo 8

Análisis de esfuerzos en fuselajes

Como se ha indicado en la Parte I, el fuselaje de un avión suele estar compuesto por un revestimiento de espesor delgado reforzado por un gran número de elementos longitudinales denominados *larguerillos*, y de elementos transversales denominados *cuadernas* y *mamparos* (ver figura 8.1). Este tipo de estructura es hiperestático, con un grado de hiperestaticidad muy alto. Sin embargo, los ensayos estructurales muestran un buen acuerdo con los resultados obtenidos aplicando la teoría de vigas en flexión, salvo en las zonas próximas a grandes aberturas o discontinuidades.

Por lo tanto, a nivel de diseño se puede realizar el análisis general de esfuerzos en el fuselaje utilizando la teoría de vigas en flexión, e investigar posteriormente por medio de procedimientos más exactos aquellas partes del fuselaje en donde esta teoría pueda dar lugar a errores apreciables.

Si el fuselaje está presurizado, a los esfuerzos obtenidos como viga hay que añadirles los existentes en el revestimiento como consecuencia de la presión interna.

Por otra parte, si los paneles del revestimiento pandean se desarrolla en ellos tensión diagonal, la cual da lugar a esfuerzos en los paneles, larguerillos y cuadernas que habría también que sumar a los anteriores.

En este Capítulo se incluyen los procedimientos de análisis del fuselaje trabajando como viga. El estudio de estos otros problemas adicionales se realizará en otra parte del Curso.

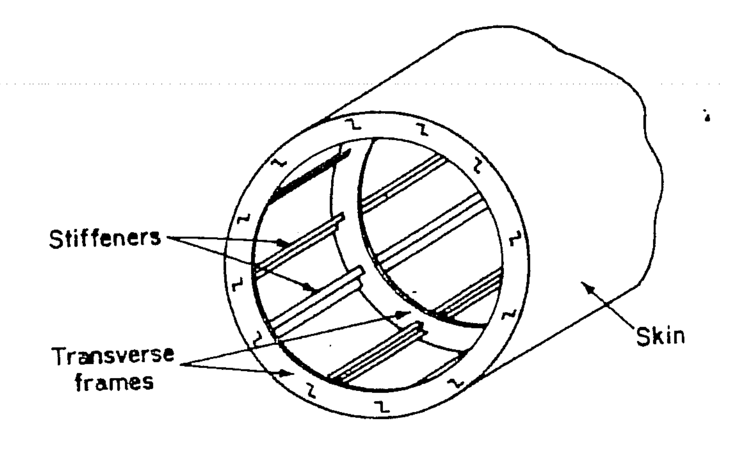


Figura 8.1: Sección transversal típica de un fuselaje

El procedimiento de análisis de esfuerzos en el fuselaje trabajando como viga es totalmente similar al del cálculo de alas. Por consiguiente, el análisis de cada sección del fuselaje constará de los mismos pasos que el de una sección de ala (ver la introducción hecha en el Capítulo 7), existiendo algunas pequeñas diferencias entre uno y otro, las cuales se indican a continuación.

8.1 Comportamiento físico de la estructura

8.1.1 Cargas axiales y de flexión

El comportamiento físico de la estructura del fuselaje ante cargas axiales y de flexión es totalmente similar al de la del ala, salvo lo siguiente:

(a) Mientras que en las alas los paneles son prácticamente planos, en un fuselaje son curvos, por lo que su esfuerzo de pandeo es mayor.

(b) Al no existir normalmente elementos estabilizados en las dos direcciones (como los cordones de largueros en las alas), el criterio de fallo suele venir determinado por un valor máximo de la deformación longitudinal (es decir que se considera que la sección ha fallado cuando se alcanza en algún punto de la misma dicho valor).

8.1.2 Cargas de cortadura y de torsión

El comportamiento físico de la estructura del fuselaje ante cargas de cortadura y de torsión es totalmente similar al de la del ala.

8.2 Idealización estructural de las secciones transversales

La idealización estructural del fuselaje será similar a la del ala, salvo lo siguiente:

Como ya se indicó en el Apartado anterior, el esfuerzo de pandeo de un panel curvo es mayor que el de uno plano de las mismas dimensiones y espesor. La teoría así como los resultados experimentales indican que la resistencia última a compresión de un panel curvo reforzado por larguerillos se puede obtener aproximadamente mediante las dos hipótesis siguientes (ver figura 8.2):

1. Una pequeña franja de panel a cada lado de la línea de unión de los larguerillos al revestimiento trabaja al mismo esfuerzo que éstos. Al igual que se dedujo para las alas, el ancho de esta franja se obtiene mediante la expresión:

$$2w = 1.7t\sqrt{\frac{E}{\sigma_{st}}}$$

2. El resto del panel resiste un esfuerzo máximo de compresión de $0.3Et/R$, siendo E el módulo elástico del material del revestimiento, y t y R el espesor y radio de curvatura del panel. Este valor es conservativo.

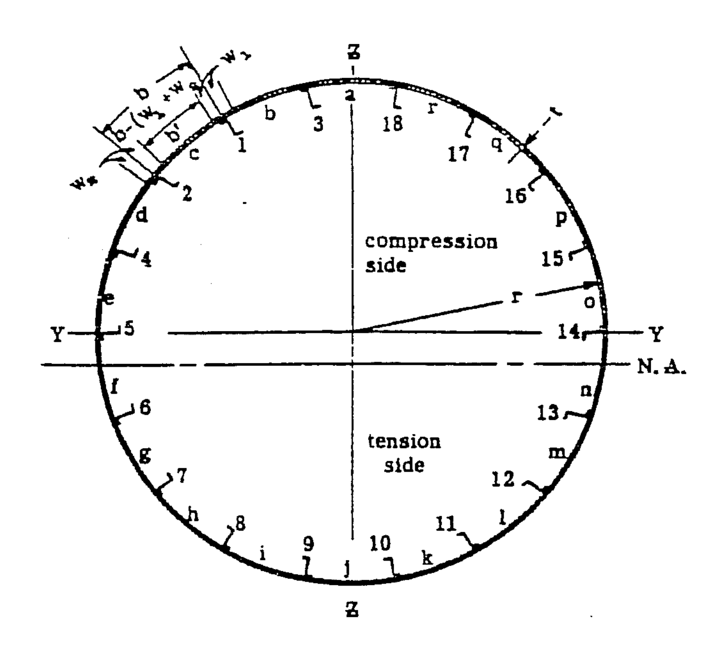


Figura 8.2: Chapa efectiva de un panel curvo

En consecuencia, el ancho de chapa efectiva correspondiente a cada uno de los paneles adyacentes a un larguerillo se obtendrá mediante las expresiones:

(a) Si el esfuerzo en el larguerillo, σ_{st}, es menor que $0.3Et/R$:

$$w = \frac{b}{2}$$

si $\sigma_{st} < 0.3 \frac{Et}{R}$

siendo b la anchura del panel.

(b) Si el esfuerzo en el larguerillo, σ_{st}, es mayor que $0.3Et/R$:

$$w = w' + \left(\frac{b}{2} - w'\right) \frac{0.3Et/R}{\sigma_{st}}$$

si $\sigma_{st} > 0.3 \frac{Et}{R}$

siendo:

$$w' = 0.85t\sqrt{\frac{E}{\sigma_{st}}}$$

Esto es porque la carga máxima que puede soportar la franja de panel comprendida entre las chapas efectivas es:

$$\left(\frac{b}{2} - w'\right) t \cdot 0.3E\frac{t}{R}$$

mientras que en el cálculo se supone que la carga que soporta es:

$$w_e t \cdot \sigma_{st}$$

Igualando ambas expresiones se deduce que el valor del área efectiva que

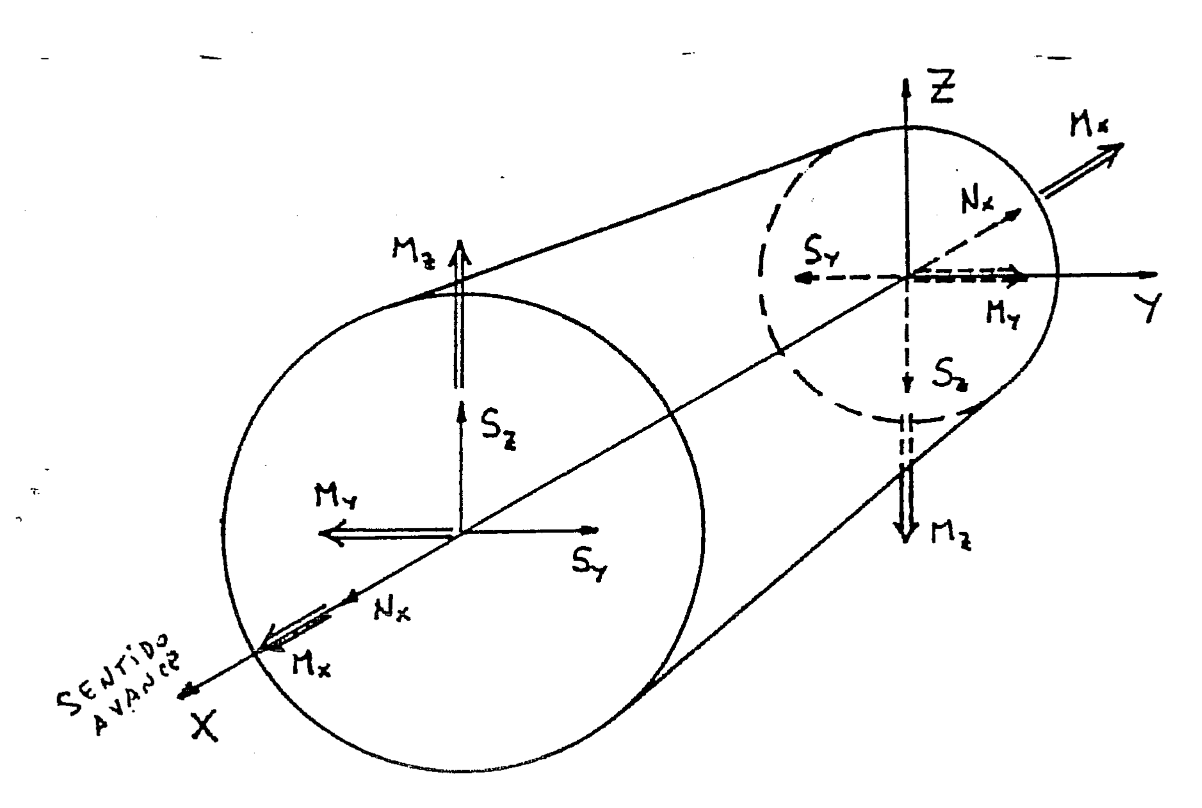


Figura 8.3: Sentidos positivos de las solicitaciones en la sección de un fuselaje

se considerará para esta franja será:

$$w_e t = \left(\frac{b}{2} - w'\right) t \cdot \frac{0.3Et/R}{\sigma_{st}}$$

Por supuesto, el valor máximo de w será la semianchura del panel.

8.3 Convenio de signos

En la figura 8.3 se representa el sistema de ejes adoptado, así como los sentidos que se considerarán positivos para las solicitaciones que actúan sobre las caras frontal y dorsal de una rebanada elemental de fuselaje.

8.4 Cálculo de los esfuerzos normales

La expresión que se utilizará para determinar los esfuerzos normales en los *booms* será similar a la empleada en el análisis de alas, pero teniendo en cuenta el diferente sistema de ejes de referencia. Así, el esfuerzo en dirección X correspondiente al *boom* r es:

$$\sigma_{r_x} = \frac{N_x}{A} - [(k_3 M_z - k_1 M_y)(Y_r - Y_g) + (k_2 M_y - k_1 M_z)(Z_r - Z_g)]$$

en donde:

$$k_1 = \frac{I_{yz}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2}$$

$$k_2 = \frac{I_{zz}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2}$$

$$k_3 = \frac{I_{yy}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2}$$

y:

- A, I_{yy}, I_{zz} e I_{yz} son las propiedades geométricas de la sección efectiva.
- (Y_g, Z_g) es la posición del centro de gravedad de la sección efectiva.
- (Y_r, Z_r) es la posición del *boom* r.
- N_x, M_y y M_z son las solicitaciones que actúan en la sección.

Teniendo en cuenta el convenio de signos adoptado en el Apartado anterior, el esfuerzo σ_{r_x} obtenido aplicando la expresión anterior será de tracción si es positivo, y de compresión si es negativo.

Los esfuerzos obtenidos por la expresión anterior han de ser multiplicados posteriormente por el factor de efectividad c a fín de obtener los esfuerzos reales existentes en cada elemento. La carga que actúa sobre el *boom* será, pues:

$$P_{r_x} = cA_{b_r}\sigma_{r_x}$$

siendo cA_{b_r} el área efectiva del *boom*.

Estas expresiones dan las componentes según el eje X de los esfuerzos y las cargas normales en cada *boom*. Al igual que ocurría en las alas, si el fuselaje tiene conicidad será necesario determinar las componentes según los eje Y y Z, que, si bien tendrán poca influencia en la carga total normal (salvo que la conicidad fuera muy pronunciada), han de ser tenidas en cuenta para determinar la cortadura que está siendo realmente soportada por el revestimiento. Las cargas normales totales sobre el elemento serán:

$$P_r = \sqrt{P_{r_x}^2 + P_{r_y}^2 + P_{r_z}^2}$$

Los valores de P_{r_y} y de P_{r_z} se determinarán, al igual que en las alas, por consideraciones geométricas:

$$P_{r_y} = \frac{\delta y}{\delta x}P_{r_x} \qquad P_{r_z} = \frac{\delta z}{\delta x}P_{r_x}$$

8.5 Cálculo de los esfuerzos de cortadura

Los esfuerzos de cortadura existentes en los paneles del revestimiento del fuselaje se obtendrán de forma totalmente similar a los correspondientes en las alas. Por ello, son totalmente válidos los procedimientos y las expresiones indicadas en el Apartado 7.5 del Capítulo anterior, pero teniendo en cuenta el diferente sistema de ejes de referencia.

Por otra parte, el cálculo de los esfuerzos de cortadura en un fuselaje suele ser más simple que en un ala, dado que aquél es generalmente un tubo unicelular, siendo necesario plantear sólo la ecuación de equilibrio estático para determinar el flujo incógnita.

Por consiguiente, en primer lugar se supondrá que el flujo de cortadura es nulo en un panel, que es lo mismo que considerar que la sección está abierta por ese panel. De acuerdo con esta hipótesis se obtendrán los flujos de cortadura en los demás paneles a partir de:

- las fuerzas cortantes existentes en la sección (procedimiento exacto sólo si se mantienen constantes las propiedades de la sección efectiva):

$$q_{b_{r,r+1}} = q_{b_{r-1,r}} - [(k_3 S_{w_y} - k_1 S_{w_z})(Y_r - Y_g) + (k_2 S_{w_z} - k_1 S_{w_y})(Z_r - Z_g)]cA_{b_r}$$

  en donde:

  - $q_{b_{r,r+1}}$ es el flujo en el panel que va del *boom* r al $r+1$
  - $q_{b_{r-1,r}}$ es el flujo en el panel que va del *boom* $r-1$ al r.
  - (Y_r, Z_r) es la posición del *boom* r.
  - cA_{b_r} es el área efectiva del *boom* r.
  - (Y_g, Z_g) es la posición del centro de gravedad de la sección efectiva.
  - k_1, k_2 y k_3 tienen las mismas expresiones dadas en el Apartado anterior, correspondientes a la sección efectiva.
  - S_{w_y} y S_{w_z} son las fuerzas cortantes resistidas por el revestimiento:

$$S_{w_y} = S_y - \sum_r P_{r_y}$$

$$S_{w_z} = S_z - \sum_r P_{r_z}$$

    siendo S_y y S_z las fuerzas cortantes totales que actúan en la sección, y P_{r_y}, P_{r_z} las componentes según los ejes Y y Z de las cargas normales que actúan en el boom r.

- o de la variación de las fuerzas axiales en los *booms* entre dos secciones del fuselaje (procedimiento que es exacto sólo si la variación de las cargas en los *booms* es lineal entre las dos secciones, pero que es aplicable al caso en que las

dos secciones efectivas tengan distintas propiedades):

$$q_{b_{r,r+1}} = q_{b_{r-1,r}} - \frac{\Delta P_{r_x}}{\Delta x}$$

Los flujos obtenidos por este procedimiento han de ser multiplicados por un factor k para tener en cuenta que los paneles tienen diferente anchura en las dos secciones. Si lo que se está determinando es el flujo en una sección 1 del fuselaje a partir de la variación de las fuerzas axiales en los *booms* entre esta sección y otra 2:

$$k = \frac{b_2}{b_1}$$

A continuación se determina el flujo incógnita mediante la ecuación de equilibrio estático:

$$M_S = M_P + M_q$$

en donde:

- M_S es el momento con respecto a un punto dado $O(Y_o, Z_o)$ de las solicitaciones que actúan en el plano de la sección:

$$M_S = M_x - S_y(Z_p - Z_o) + S_z(Y_p - Y_o)$$

  siendo Y_p y Z_p las coordenadas del punto de aplicación de las cargas.

- M_P es el momento de las componentes según los ejes Y y Z de las cargas en los *booms*:

$$M_P = -\sum_r P_{r_y}(Z_r - Z_o) + \sum_r P_{r_z}(Y_r - Y_o)$$

  estando el sumatorio extendido a todos los *booms*, y siendo Y_r y Z_r las coordenadas del *boom* r.

- M_q es el momento de los flujos de cortadura que actúan en la sección:

$$M_q = 2\sum_n A_n q_{b_n} + 2\sum_R A_R q_R$$

  en donde el primer sumatorio está extendido a todos los tramos de la sección, siendo:

  - A_n el área determinada por el punto O y el tramo n.
  - q_{b_n} el flujo de cortadura que hay en este tramo, correspondiente a la sección abierta.

  Sin embargo, el segundo sumatorio está extendido a las celdas, siendo:

- A_R el área de la celda R.
- q_R el flujo incógnita en la misma.

Si el fuselaje tuviese dos celdas (doble burbuja) habría dos flujos incógnita, siendo necesaria una nueva ecuación para determinarlos. Esta se obtiene de plantear la igualdad de los giros por unidad de longitud de las dos celdas:

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_I = \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{II}$$

El giro por unidad de longitud de cualquiera de las celdas vale:

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_R = \frac{1}{2A_R G_{ref}}\left(-q_{R-1}\delta_{R-1,R} + q_R\delta_R - q_{R+1}\delta_{R+1,R} + \sum_R \frac{q_{b_n} L_n}{t_n^*}\right)$$

siendo:

- A_R el área de la celda R.
- G_{ref} el módulo elástico en cortadura de referencia.
- G_n el módulo elástico en cortadura del tramo n.
- t_n^* el espesor equivalente del tramo n:

$$t_n^* = \frac{G_n}{G_{ref}} t_n$$

- $\delta_{R-1,R}$ la suma de los valores de L_n/t_n^* correspondientes a los tramos comunes a las celdas $R-1$ y R.
- $\delta_{R+1,R}$ la suma de los valores de L_n/t_n^* correspondientes a los tramos comunes a las celdas $R+1$ y R
- δ_R la suma de los valores de L_n/t_n^* correspondientes a todos los tramos de la celda R.

El sumatorio está extendido a los tramos de la celda R.

8.6 Ejemplos

En la figura 8.4 se muestra una parte de un fuselaje circular con conicidad, que podría ser representativo de una porción del fuselaje trasero de un avión de pequeño tamaño. Este fuselaje tiene las siguientes propiedades:

Espesor del revestimiento:	0.8	mm
Area de los larguerillos tipo L1:	100	mm^2
Area de los larguerillos tipo L2:	70	mm^2
Area de los larguerillos tipo L3:	50	mm^2

Larguerillos tipo L1:	2 y 16
Larguerillos tipo L2:	1, 3, 4, 14 y 15
Larguerillos tipo L3:	Resto

Radio de la seccion O:	255	mm
Radio de la seccion A:	382	mm

Módulo elástico a tracción del material:	70000	N/mm^2
Módulo elástico a compresión del material:	70000	N/mm^2
Módulo elástico a cortadura del material:	27000	N/mm^2

Las solicitaciones existentes en el centro geométrico de la sección A son:

$$\begin{aligned} S_y &= -10000 \quad N \\ S_z &= -20000 \quad N \\ M_x &= 20\times10^6 \quad N\cdot mm \\ M_y &= 80\times10^6 \quad N\cdot mm \\ M_z &= 40\times10^6 \quad N\cdot mm \end{aligned}$$

Las solicitaciones existentes en el centro geométrico de la sección O son:

$$\begin{aligned} S_y &= -10000 \quad N \\ S_z &= -20000 \quad N \\ M_x &= 20\times10^6 \quad N\cdot mm \\ M_y &= 0 \quad N\cdot mm \\ M_z &= 0 \quad N\cdot mm \end{aligned}$$

La variación de las solicitaciones entre ambas secciones es lineal.

Se desea calcular para la sección A:

I.- El factor de reserva correspondiente al momento flector M_y, si la deformación máxima permitida es del 0.6%.

II.- El factor de reserva correspondiente a la combinación de los momentos flectores M_y y M_z, si la deformación máxima permitida es del 0.6%.

III.- Los esfuerzos normales que actúan sobre los larguerillos.

IV.- Los esfuerzos de cortadura que actúan sobre los paneles del revestimiento.

Los cálculos se harán suponiendo que las curvas $\sigma - \varepsilon$ de los larguerillos tipo L1, L2 y L3 son las (1), (2) y (3), respectivamente, de la:

a) figura 8.5, en la página 130.

b) figura 8.6, en la página 131.

La curva $\sigma - \varepsilon$ en tracción del material es la indicada en la figura 8.7, en la página 132.

Resolución de los puntos I, II y III

Los cálculos necesarios para resolver los tres primeros puntos son totalmente similares a los que se hicieron en los ejemplos del Capítulo 7, salvo las diferencias

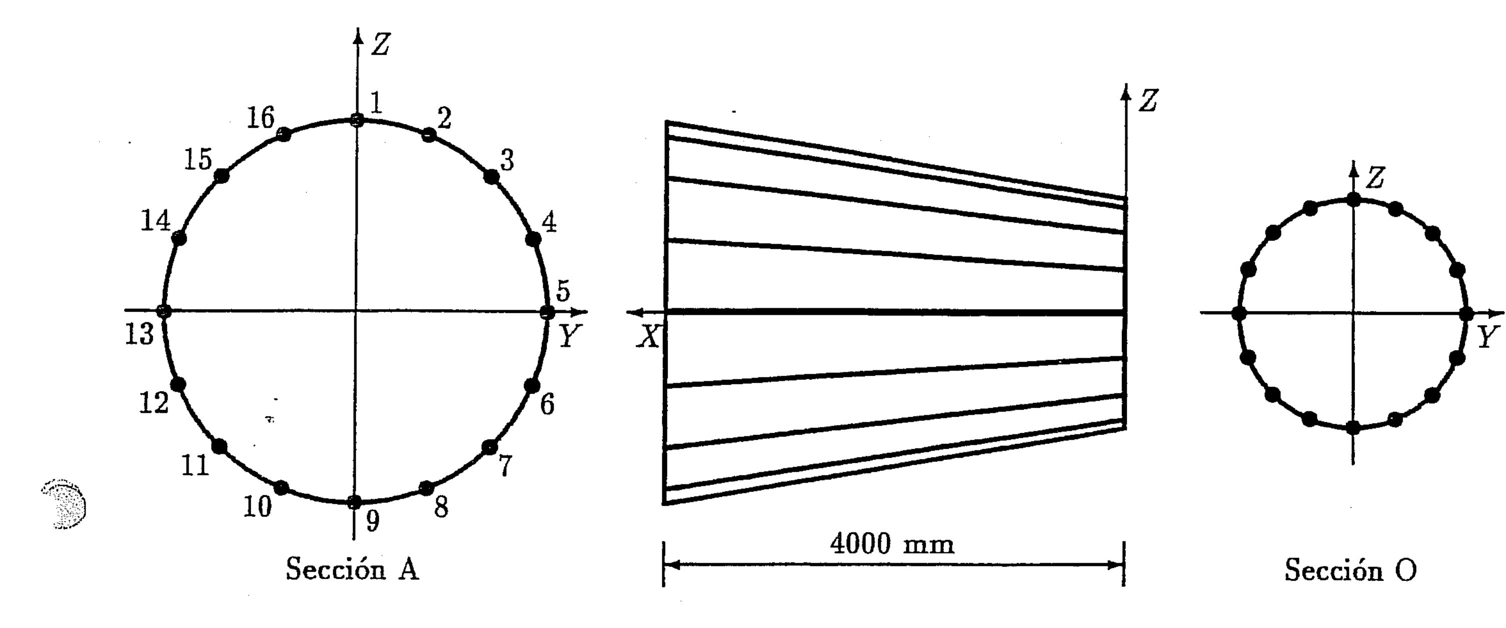


Figura 8.4: Fuselaje del ejemplo

-400
-350
-300
-250
-200
-150
-100
-50
0
σ
(N/mm^2)
1
2
3
0.0 -0.001 -0.002 -0.003 -0.004 -0.005 -0.006 -0.007 -0.008 -0.009 -0.010
ε

Figura 8.5: Curvas $\sigma - \varepsilon$ de los larguerillos del fuselaje del ejemplo

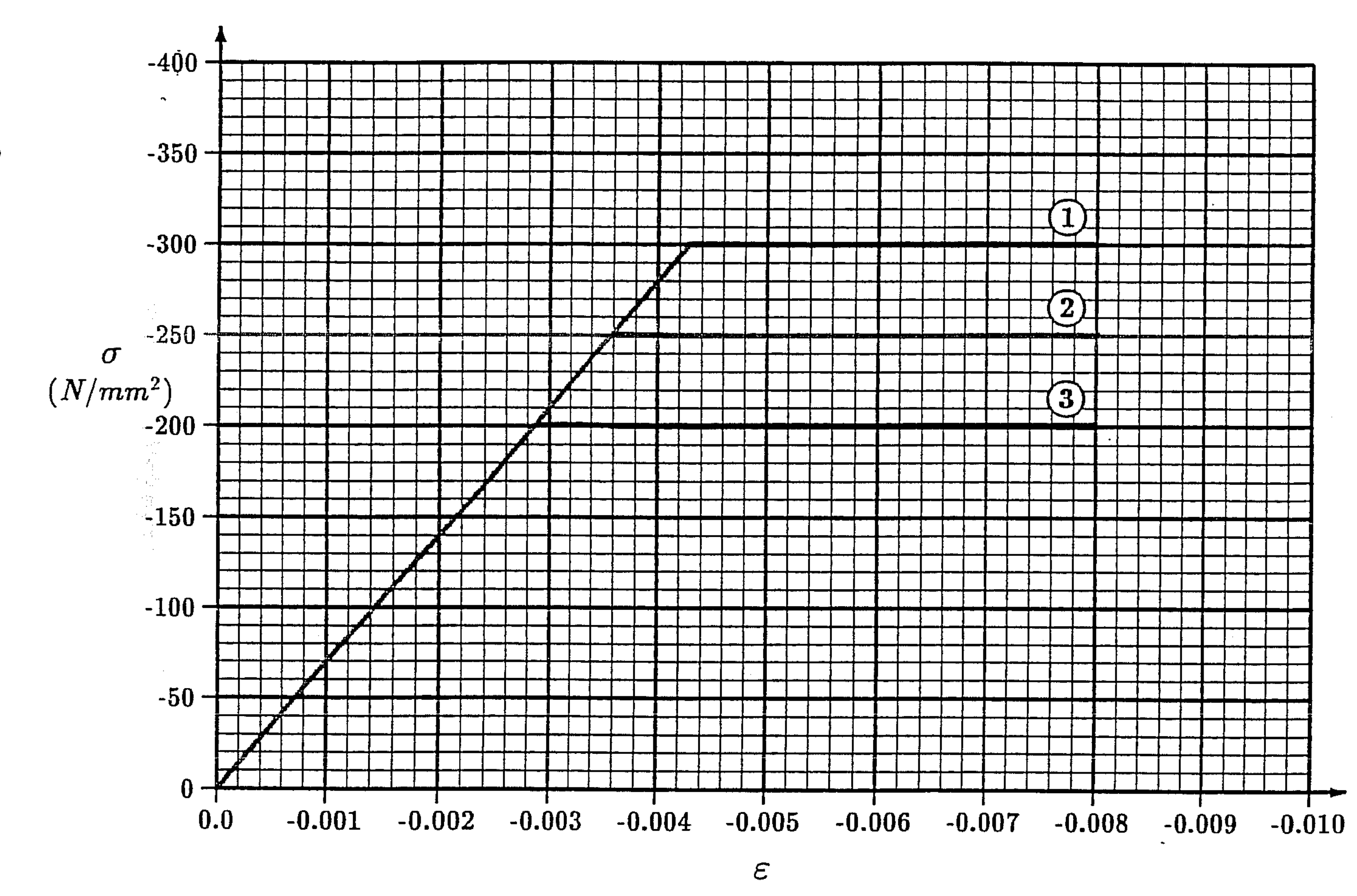


Figura 8.6: Curvas $\sigma - \varepsilon$ simplificadas de los larguerillos del fuselaje del ejemplo

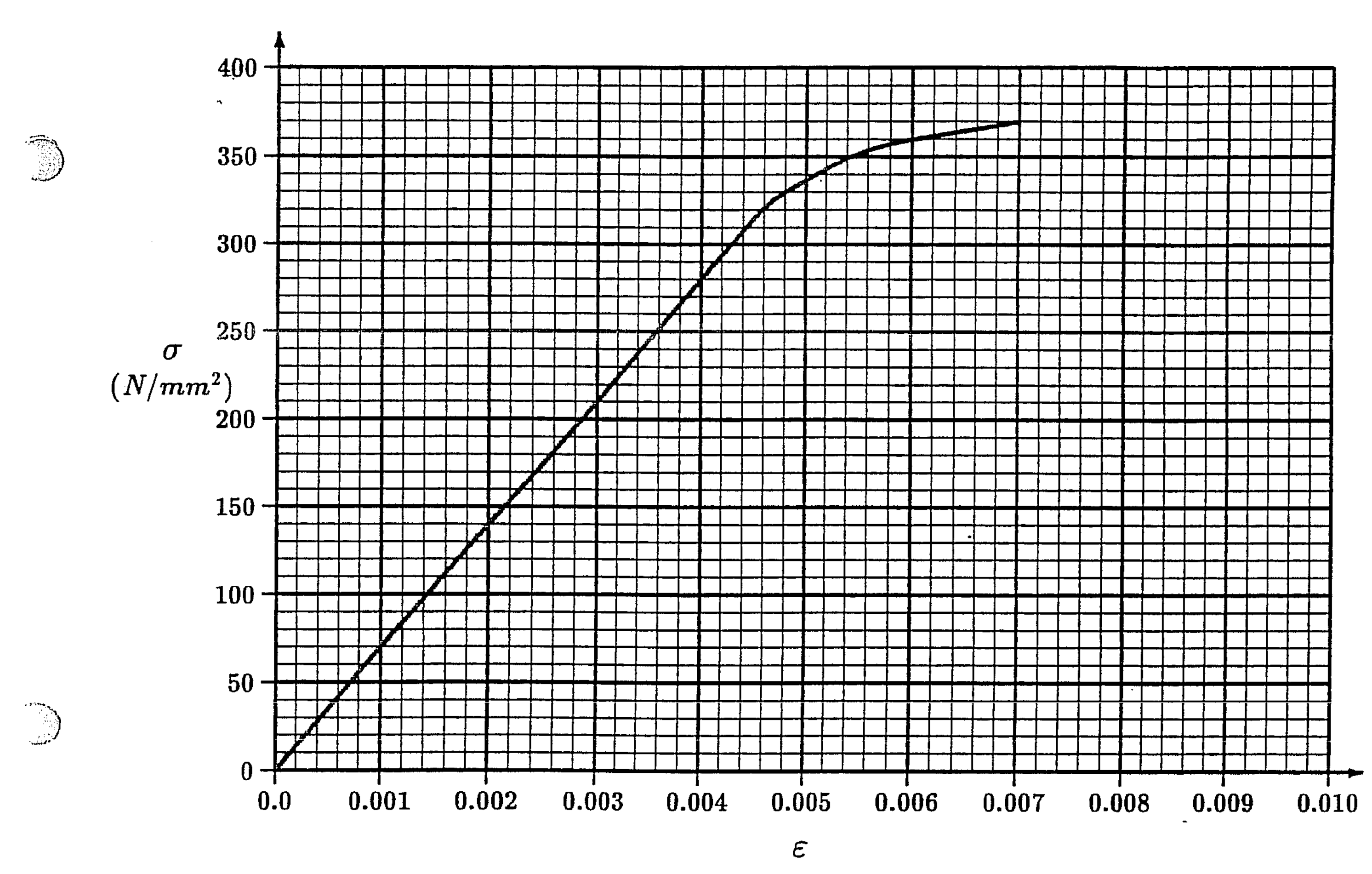


Figura 8.7: Curvas $\sigma - \varepsilon$ en tracción del material

indicadas en los Apartados anteriores de este Capítulo. Estos cálculos se encuentran recogidos en las tablas siguientes:

Punto I,a):	Tablas 8.1 a 8.3
Punto I,b):	Tablas 8.4 a 8.6
Punto II,a):	Tablas 8.7 a 8.9
Punto II,b):	Tablas 8.10 a 8.12
Punto III,a):	Tablas 8.13 a 8.15
Punto III,b):	Tablas 8.16 a 8.18

Los factores de reserva correspondientes a los puntos I y II se obtienen de la ecuación:

$$\varepsilon_x = \frac{RF \cdot N_x}{EA} - RF \cdot \frac{(k_3 M_z - k_1 M_y)(Y - Y_g) + (k_2 M_y - k_1 M_z)(Z - Z_g)}{E} = -0.006$$

De acuerdo con las propiedades geométricas obtenidas al final de las iteraciones respectivas, los factores de reserva valen:

Punto I,a):

Según la tabla 8.3:

$$k_1 = \frac{I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} = 0$$

$$k_2 = \frac{I_{zz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} = 7.19479 \times 10^{-9}$$

$$k_3 = \frac{I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} = 6.26529 \times 10^{-9}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior y aplicándola para el *boom* 1 que es el más cargado:

$$-RF \cdot [0.57558\,(382 + 72.7)] = 70000 \times (-0.006)$$

luego:

$$RF = 1.60$$

Punto I,b):

Según la tabla 8.6:

$$k_1 = \frac{I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} = 0$$

$$k_2 = \frac{I_{zz}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} = 7.17064 \times 10^{-9}$$

$$k_3 = \frac{I_{yy}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} = 6.25127 \times 10^{-9}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior y aplicándola para el *boom* 1 que es el más cargado:

$$-RF \cdot [0.57365\,(382 + 72.1)] = 70000 \times (-0.006)$$

luego:

$$RF = 1.61$$

Punto II,a):

Según la tabla 8.9:

$$k_1 = \frac{I_{yz}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} = -0.72340 \times 10^{-9}$$

$$k_2 = \frac{I_{zz}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} = 6.83987 \times 10^{-9}$$

$$k_3 = \frac{I_{yy}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} = 6.86967 \times 10^{-9}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior y aplicándola para el *boom* 2 que es el más cargado:

$$-RF \cdot [0.33266\,(146.2 + 55.7) + 0.57613\,(352.9 + 58.6)] = 70000 \times (-0.006)$$

luego:

$$RF = 1.38$$

Punto II,b):

Según la tabla 8.12:

$$k_1 = \frac{I_{yz}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} = -0.71907 \times 10^{-9}$$

$$k_2 = \frac{I_{zz}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} = 6.80773 \times 10^{-9}$$

$$k_3 = \frac{I_{yy}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} = 6.83868 \times 10^{-9}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior y aplicándola para el *boom* 2 que es el más cargado:

$$-RF \cdot [0.33107\,(146.2 + 55.2) + 0.57338\,(352.9 + 57.7)] = 70000 \times (-0.006)$$

luego:

$$RF = 1.39$$

En cuanto a los esfuerzos solicitados en el punto III, son los que se indican en la columna (9) de las tablas 8.15 y 8.18 que corresponden a la última iteración realizada suponiendo que las curvas $\sigma - \varepsilon$ son las reales o las simplificadas, respectivamente.

ITERACION 1													
Posición asumida para el c.d.g.: Y_g = +0.0 Z_g = -146.2. Eje neutro asumido: +0.000Y +1.000Z +146.185 = 0													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Larguerillo		A_l	Y	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot A$
N^o	Tipo	(mm^2)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm^2)	(N/mm^2)	(mm^2)	(mm^2)	(σ_r/σ_l)	(mm
1	L2	70.0	0.0	382.0	528.2	-6.000	-420.0	-250.0	36.1	106.1	0.595	63
2	L1	100.0	146.2	352.9	499.1	-5.670	-396.9	-298.7	31.9	131.9	0.753	99
3	L2	70.0	270.1	270.1	416.3	-4.729	-331.0	-246.4	36.5	106.5	0.744	79
4	L2	70.0	352.9	146.2	292.4	-3.321	-232.5	-222.8	39.2	109.2	0.959	104
5	L3	50.0	382.0	0.0	146.2	-1.661	-116.2	-116.2	62.0	112.0	1.000	112
6	L3	50.0	352.9	-146.2	0.0	0.000	0.0	0.0	120.0	170.0	1.000	170
7	L3	50.0	270.1	-270.1	-123.9	1.408	98.5	98.5	120.0	170.0	1.000	170
8	L3	50.0	146.2	-352.9	-206.7	2.348	164.4	164.4	120.0	170.0	1.000	170
9	L3	50.0	0.0	-382.0	-235.8	2.679	187.5	187.5	120.0	170.0	1.000	170.
10	L3	50.0	-146.2	-352.9	-206.7	2.348	164.4	164.4	120.0	170.0	1.000	170.
11	L3	50.0	-270.1	-270.1	-123.9	1.408	98.5	98.5	120.0	170.0	1.000	170.
12	L3	50.0	-352.9	-146.2	0.0	0.000	0.0	0.0	120.0	170.0	1.000	170.
13	L3	50.0	-382.0	0.0	146.2	-1.661	-116.2	-116.2	62.0	112.0	1.000	112.
14	L2	70.0	-352.9	146.2	292.4	-3.321	-232.5	-222.8	39.2	109.2	0.959	104.
15	L2	70.0	-270.1	270.1	416.3	-4.729	-331.0	-246.4	36.5	106.5	0.744	79.
16	L1	100.0	-146.2	352.9	499.1	-5.670	-396.9	-298.7	31.9	131.9	0.753	99.

$$\text{Area} = 2044.\ \text{mm}^2; \qquad Y_g = 0.0\ \text{mm}; \qquad Z_g = \text{-77.8 mm}$$

$$I_{yy} = 1.3685403\text{E+08 mm}^4; \quad I_{zz} = 1.4898522\text{E+08 mm}^4; \quad I_{yz} = 0.0000000\text{E+00 mm}^4$$

Eje neutro obtenido: +0.000Y +1.000Z +77.761 = 0

Tabla 8.1: Cálculos correspondientes a la 1ª iteración del ejemplo I,a)

ITERACION 2													
Posición asumida para el c.d.g.: Y_g = +0.0 Z_g = -77.8. Eje neutro asumido: +0.000Y +1.000Z +77.761 = 0													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Larguerillo		A_l	Y	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot A$
Nº	Tipo	(mm²)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm²)	(N/mm²)	(mm²)	(mm²)	(σ_r/σ_l)	(mm
1	L2	70.0	0.0	382.0	459.8	-6.000	-420.0	-250.0	36.1	106.1	0.595	63
2	L1	100.0	146.2	352.9	430.7	-5.621	-393.4	-298.5	31.9	131.9	0.759	100
3	L2	70.0	270.1	270.1	347.9	-4.540	-317.8	-245.2	36.6	106.6	0.772	82
4	L2	70.0	352.9	146.2	223.9	-2.923	-204.6	-204.6	41.6	111.6	1.000	111
5	L3	50.0	382.0	0.0	77.8	-1.015	-71.0	-71.0	87.3	137.3	1.000	137
6	L3	50.0	352.9	-146.2	-68.4	0.893	62.5	62.5	120.0	170.0	1.000	170
7	L3	50.0	270.1	-270.1	-192.4	2.510	175.7	175.7	120.0	170.0	1.000	170
8	L3	50.0	146.2	-352.9	-275.2	3.591	251.4	251.4	120.0	170.0	1.000	170
9	L3	50.0	0.0	-382.0	-304.2	3.970	277.9	277.9	120.0	170.0	1.000	170
10	L3	50.0	-146.2	-352.9	-275.2	3.591	251.4	251.4	120.0	170.0	1.000	170
11	L3	50.0	-270.1	-270.1	-192.4	2.510	175.7	175.7	120.0	170.0	1.000	170
12	L3	50.0	-352.9	-146.2	-68.4	0.893	62.5	62.5	120.0	170.0	1.000	170
13	L3	50.0	-382.0	0.0	77.8	-1.015	-71.0	-71.0	87.3	137.3	1.000	137
14	L2	70.0	-352.9	146.2	223.9	-2.923	-204.6	-204.6	41.6	111.6	1.000	111.
15	L2	70.0	-270.1	270.1	347.9	-4.540	-317.8	-245.2	36.6	106.6	0.772	82.
16	L1	100.0	-146.2	352.9	430.7	-5.621	-393.4	-298.5	31.9	131.9	0.759	100.

Area = 2116. mm²; Y_g = 0.0 mm; Z_g = -73.1 mm

I_{yy} = 1.3884358E+08 mm⁴; I_{zz} = 1.5857941E+08 mm⁴; I_{yz} = 0.0000000E+00 mm⁴

Eje neutro obtenido: +0.000Y +1.000Z +73.105 = 0

Tabla 8.2: Cálculos correspondientes a la 2ª iteración del ejemplo I,a)

ITERACION 3													
Posición asumida para el c.d.g.: Y_g = +0.0 Z_g = -73.1. Eje neutro asumido: +0.000Y +1.000Z +73.105 = 0													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Larguerillo		A_l	Y	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot A$
N°	Tipo	(mm^2)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm^2)	(N/mm^2)	(mm^2)	(mm^2)	(σ_r/σ_l)	(mm
1	L2	70.0	0.0	382.0	455.1	-6.000	-420.0	-250.0	36.1	106.1	0.595	63
2	L1	100.0	146.2	352.9	426.0	-5.617	-393.2	-298.5	31.9	131.9	0.759	100
3	L2	70.0	270.1	270.1	343.2	-4.525	-316.7	-245.1	36.6	106.6	0.774	82
4	L2	70.0	352.9	146.2	219.3	-2.891	-202.4	-202.4	41.9	111.9	1.000	111
5	L3	50.0	382.0	0.0	73.1	-0.964	-67.5	-67.5	90.4	140.4	1.000	140
6	L3	50.0	352.9	-146.2	-73.1	0.963	67.4	67.4	120.0	170.0	1.000	170
7	L3	50.0	270.1	-270.1	-197.0	2.597	181.8	181.8	120.0	170.0	1.000	170
8	L3	50.0	146.2	-352.9	-279.8	3.689	258.2	258.2	120.0	170.0	1.000	170
9	L3	50.0	0.0	-382.0	-308.9	4.072	285.1	285.1	120.0	170.0	1.000	170
10	L3	50.0	-146.2	-352.9	-279.8	3.689	258.2	258.2	120.0	170.0	1.000	170
11	L3	50.0	-270.1	-270.1	-197.0	2.597	181.8	181.8	120.0	170.0	1.000	170
12	L3	50.0	-352.9	-146.2	-73.1	0.963	67.4	67.4	120.0	170.0	1.000	170
13	L3	50.0	-382.0	0.0	73.1	-0.964	-67.5	-67.5	90.4	140.4	1.000	140
14	L2	70.0	-352.9	146.2	219.3	-2.891	-202.4	-202.4	41.9	111.9	1.000	111
15	L2	70.0	-270.1	270.1	343.2	-4.525	-316.7	-245.1	36.6	106.6	0.774	82
16	L1	100.0	-146.2	352.9	426.0	-5.617	-393.2	-298.5	31.9	131.9	0.759	100

Area = 2123. mm^2; Y_g = 0.0 mm; Z_g = -72.7 mm

I_{yy} = 1.3898949E+08 mm^4; I_{zz} = 1.5960954E+08 mm^4; I_{yz} = 0.0000000E+00 mm^4

Eje neutro obtenido: +0.000Y +1.000Z +72.717 = 0

Tabla 8.3: Cálculos correspondientes a la 3ª iteración del ejemplo I,a)

ITERACION 1												
Posición asumida para el c.d.g.: Y_g = +0.0 Z_g = -146.2. Eje neutro asumido: +0.000Y +1.000Z +146.185 =												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
Larguerillo		A_l	Y	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot$
N°	Tipo	(mm^2)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm^2)	(N/mm^2)	(mm^2)	(mm^2)	(σ_r/σ_l)	(mn
1	L2	70.0	0.0	382.0	528.2	-6.000	-420.0	-250.0	36.1	106.1	0.595	6
2	L1	100.0	146.2	352.9	499.1	-5.670	-396.9	-300.0	31.8	131.8	0.756	9
3	L2	70.0	270.1	270.1	416.3	-4.729	-331.0	-250.0	36.1	106.1	0.755	8
4	L2	70.0	352.9	146.2	292.4	-3.321	-232.5	-232.5	38.0	108.0	1.000	10
5	L3	50.0	382.0	0.0	146.2	-1.661	-116.2	-116.2	62.0	112.0	1.000	11
6	L3	50.0	352.9	-146.2	0.0	0.000	0.0	0.0	120.0	170.0	1.000	17
7	L3	50.0	270.1	-270.1	-123.9	1.408	98.5	98.5	120.0	170.0	1.000	17
8	L3	50.0	146.2	-352.9	-206.7	2.348	164.4	164.4	120.0	170.0	1.000	17
9	L3	50.0	0.0	-382.0	-235.8	2.679	187.5	187.5	120.0	170.0	1.000	17
10	L3	50.0	-146.2	-352.9	-206.7	2.348	164.4	164.4	120.0	170.0	1.000	17
11	L3	50.0	-270.1	-270.1	-123.9	1.408	98.5	98.5	120.0	170.0	1.000	17
12	L3	50.0	-352.9	-146.2	0.0	0.000	0.0	0.0	120.0	170.0	1.000	17
13	L3	50.0	-382.0	0.0	146.2	-1.661	-116.2	-116.2	62.0	112.0	1.000	11
14	L2	70.0	-352.9	146.2	292.4	-3.321	-232.5	-232.5	38.0	108.0	1.000	10
15	L2	70.0	-270.1	270.1	416.3	-4.729	-331.0	-250.0	36.1	106.1	0.755	8
16	L1	100.0	-146.2	352.9	499.1	-5.670	-396.9	-300.0	31.8	131.8	0.756	9

Area = 2053. mm^2; Y_g = 0.0 mm; Z_g = -76.6 mm

I_{yy} = 1.3753987E+08 mm^4; I_{zz} = 1.4997363E+08 mm^4; I_{yz} = 0.0000000E+00 mm^4

Eje neutro obtenido: +0.000Y +1.000Z +76.570 = 0

Tabla 8.4: Cálculos correspondientes a la 1ª iteración del ejemplo I,b)

ITERACION 2													
Posición asumida para el c.d.g.: Y_g = +0.0 Z_g = -76.6. Eje neutro asumido: +0.000Y +1.000Z +76.570 = 0													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Larguerillo		A_l	Y	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot A$
Nº	Tipo	(mm²)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm²)	(N/mm²)	(mm²)	(mm²)	(σ_r/σ_l)	(mm
1	L2	70.0	0.0	382.0	458.6	-6.000	-420.0	-250.0	36.1	106.1	0.595	63
2	L1	100.0	146.2	352.9	429.5	-5.620	-393.4	-300.0	31.8	131.8	0.763	100
3	L2	70.0	270.1	270.1	346.7	-4.536	-317.5	-250.0	36.1	106.1	0.787	83
4	L2	70.0	352.9	146.2	222.8	-2.915	-204.0	-204.0	41.7	111.7	1.000	111
5	L3	50.0	382.0	0.0	76.6	-1.002	-70.1	-70.1	88.1	138.1	1.000	138
6	L3	50.0	352.9	-146.2	-69.6	0.911	63.8	63.8	120.0	170.0	1.000	170.
7	L3	50.0	270.1	-270.1	-193.5	2.532	177.3	177.3	120.0	170.0	1.000	170.
8	L3	50.0	146.2	-352.9	-276.4	3.616	253.1	253.1	120.0	170.0	1.000	170.
9	L3	50.0	0.0	-382.0	-305.4	3.996	279.7	279.7	120.0	170.0	1.000	170.
10	L3	50.0	-146.2	-352.9	-276.4	3.616	253.1	253.1	120.0	170.0	1.000	170.
11	L3	50.0	-270.1	-270.1	-193.5	2.532	177.3	177.3	120.0	170.0	1.000	170.
12	L3	50.0	-352.9	-146.2	-69.6	0.911	63.8	63.8	120.0	170.0	1.000	170.
13	L3	50.0	-382.0	0.0	76.6	-1.002	-70.1	-70.1	88.1	138.1	1.000	138.
14	L2	70.0	-352.9	146.2	222.8	-2.915	-204.0	-204.0	41.7	111.7	1.000	111.
15	L2	70.0	-270.1	270.1	346.7	-4.536	-317.5	-250.0	36.1	106.1	0.787	83.
16	L1	100.0	-146.2	352.9	429.5	-5.620	-393.4	-300.0	31.8	131.8	0.763	100.

Area = 2121. mm²; Y_g = 0.0 mm; Z_g = -72.4 mm

I_{yy} = 1.3932093E+08 mm⁴; I_{zz} = 1.5903309E+08 mm⁴; I_{yz} = 0.0000000E+00 mm⁴

Eje neutro obtenido: +0.000Y +1.000Z +72.442 = 0

Tabla 8.5: Cálculos correspondientes a la 2ª iteración del ejemplo I,b)

ITERACION 3													
Posición asumida para el c.d.g.: Y_g = +0.0 Z_g = -72.4. Eje neutro asumido: +0.000Y +1.000Z +72.442 = 0													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
Larguerillo		A_l	Y	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot$
Nº	Tipo	(mm^2)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm^2)	(N/mm^2)	(mm^2)	(mm^2)	(σ_r/σ_l)	(mm
1	L2	70.0	0.0	382.0	454.4	-6.000	-420.0	-250.0	36.1	106.1	0.595	6
2	L1	100.0	146.2	352.9	425.4	-5.616	-393.1	-300.0	31.8	131.8	0.763	10
3	L2	70.0	270.1	270.1	342.6	-4.523	-316.6	-250.0	36.1	106.1	0.790	8
4	L2	70.0	352.9	146.2	218.6	-2.887	-202.1	-202.1	42.0	112.0	1.000	11
5	L3	50.0	382.0	0.0	72.4	-0.956	-67.0	-67.0	90.9	140.9	1.000	14
6	L3	50.0	352.9	-146.2	-73.7	0.974	68.2	68.2	120.0	170.0	1.000	17
7	L3	50.0	270.1	-270.1	-197.7	2.610	182.7	182.7	120.0	170.0	1.000	17
8	L3	50.0	146.2	-352.9	-280.5	3.703	259.2	259.2	120.0	170.0	1.000	17
9	L3	50.0	0.0	-382.0	-309.6	4.087	286.1	286.1	120.0	170.0	1.000	17
10	L3	50.0	-146.2	-352.9	-280.5	3.703	259.2	259.2	120.0	170.0	1.000	17
11	L3	50.0	-270.1	-270.1	-197.7	2.610	182.7	182.7	120.0	170.0	1.000	17
12	L3	50.0	-352.9	-146.2	-73.7	0.974	68.2	68.2	120.0	170.0	1.000	17
13	L3	50.0	-382.0	0.0	72.4	-0.956	-67.0	-67.0	90.9	140.9	1.000	14
14	L2	70.0	-352.9	146.2	218.6	-2.887	-202.1	-202.1	42.0	112.0	1.000	11
15	L2	70.0	-270.1	270.1	342.6	-4.523	-316.6	-250.0	36.1	106.1	0.790	8
16	L1	100.0	-146.2	352.9	425.4	-5.616	-393.1	-300.0	31.8	131.8	0.763	10

$$\text{Area} = 2128.\ mm^2; \qquad Y_g = 0.0\ mm; \qquad Z_g = -72.1\ mm$$

$$I_{yy} = 1.3945762E+08\ mm^4; \quad I_{zz} = 1.5996739E+08\ mm^4; \quad I_{yz} = 0.0000000E+00\ mm^4$$

Eje neutro obtenido: +0.000Y +1.000Z +72.087 = 0

Tabla 8.6: Cálculos correspondientes a la 3ª iteración del ejemplo I,b)

ITERACION 1													
Posición asumida para el c.d.g.: $Y_g = +0.0$ $Z_g = -158.2$. Eje neutro asumido: +0.414Y +1.000Z +158.230 =													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Larguerillo		A_l	Y	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	c ·
N°	Tipo	(mm^2)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm^2)	(N/mm^2)	(mm^2)	(mm^2)	(σ_r/σ_l)	(mm
1	L2	70.0	0.0	382.0	499.1	-5.670	-396.9	-250.0	36.1	106.1	0.630	6
2	L1	100.0	146.2	352.9	528.2	-6.000	-420.0	-300.0	31.8	131.8	0.714	9
3	L2	70.0	270.1	270.1	499.1	-5.670	-396.9	-250.0	36.1	106.1	0.630	6
4	L2	70.0	352.9	146.2	416.3	-4.729	-331.0	-246.4	36.5	106.5	0.744	7
5	L3	50.0	382.0	0.0	292.4	-3.321	-232.5	-187.1	44.3	94.3	0.805	7
6	L3	50.0	352.9	-146.2	146.2	-1.661	-116.2	-116.2	62.0	112.0	1.000	11
7	L3	50.0	270.1	-270.1	0.0	0.000	0.0	0.0	120.0	170.0	1.000	17
8	L3	50.0	146.2	-352.9	-123.9	1.408	98.5	98.5	120.0	170.0	1.000	17
9	L3	50.0	0.0	-382.0	-206.7	2.348	164.4	164.4	120.0	170.0	1.000	17
10	L3	50.0	-146.2	-352.9	-235.8	2.679	187.5	187.5	120.0	170.0	1.000	17
11	L3	50.0	-270.1	-270.1	-206.7	2.348	164.4	164.4	120.0	170.0	1.000	17
12	L3	50.0	-352.9	-146.2	-123.9	1.408	98.5	98.5	120.0	170.0	1.000	17
13	L3	50.0	-382.0	0.0	0.0	0.000	0.0	0.0	120.0	170.0	1.000	17
14	L2	70.0	-352.9	146.2	146.2	-1.661	-116.2	-116.2	62.0	132.0	1.000	13
15	L2	70.0	-270.1	270.1	292.4	-3.321	-232.5	-222.8	39.2	109.2	0.959	10
16	L1	100.0	-146.2	352.9	416.3	-4.729	-331.0	-290.2	32.5	132.5	0.877	11

Area = 2038. mm^2; Y_g = -43.4 mm; Z_g = -69.2 mm

I_{yy} = 1.4120488E+08 mm^4; I_{zz} = 1.4256322E+08 mm^4; I_{yz} = -9747322. mm^4

Eje neutro obtenido: +0.545Y +1.000Z +92.876 = 0

Tabla 8.7: Cálculos correspondientes a la 1ª iteración del ejemplo II,a)

ITERACION 2												
Posición asumida para el c.d.g.: Y_g = -43.4 Z_g = -69.2. Eje neutro asumido: +0.545Y +1.000Z +92.876 = (												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
Larguerillo		A_l	Y	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot$
Nº	Tipo	(mm^2)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm^2)	(N/mm^2)	(mm^2)	(mm^2)	(σ_r/σ_l)	(mı
1	L2	70.0	0.0	382.0	417.0	-5.422	-379.6	-249.7	36.1	106.1	0.658	6
2	L1	100.0	146.2	352.9	461.4	-6.000	-420.0	-300.0	31.8	131.8	0.714	9
3	L2	70.0	270.1	270.1	448.0	-5.826	-407.8	-250.0	36.1	106.1	0.613	6
4	L2	70.0	352.9	146.2	378.8	-4.926	-344.8	-247.6	36.4	106.4	0.718	7
5	L3	50.0	382.0	0.0	264.3	-3.438	-240.6	-189.0	44.0	94.0	0.785	7
6	L3	50.0	352.9	-146.2	122.1	-1.587	-111.1	-111.1	64.0	114.0	1.000	11
7	L3	50.0	270.1	-270.1	-26.4	0.343	24.0	24.0	120.0	170.0	1.000	17
8	L3	50.0	146.2	-352.9	-158.4	2.060	144.2	144.2	120.0	170.0	1.000	17
9	L3	50.0	0.0	-382.0	-253.9	3.301	231.1	231.1	120.0	170.0	1.000	17
10	L3	50.0	-146.2	-352.9	-298.3	3.879	271.5	271.5	120.0	170.0	1.000	17
11	L3	50.0	-270.1	-270.1	-284.9	3.705	259.3	259.3	120.0	170.0	1.000	17
12	L3	50.0	-352.9	-146.2	-215.7	2.805	196.3	196.3	120.0	170.0	1.000	17
13	L3	50.0	-382.0	0.0	-101.2	1.317	92.2	92.2	120.0	170.0	1.000	17
14	L2	70.0	-352.9	146.2	41.0	-0.534	-37.3	-37.3	120.0	190.0	1.000	19
15	L2	70.0	-270.1	270.1	189.5	-2.464	-172.5	-172.5	46.9	116.9	1.000	11
16	L1	100.0	-146.2	352.9	321.5	-4.181	-292.6	-279.3	33.4	133.4	0.955	12

Area = 2118. mm^2; Y_g = -54.5 mm; Z_g = -59.2 mm

I_{yy} = 1.4735731E+08 mm^4; I_{zz} = 1.4791970E+08 mm^4; I_{yz} = -1.5309594E+07 mm^4

Eje neutro obtenido: +0.572Y +1.000Z +90.404 = 0

Tabla 8.8: Cálculos correspondientes a la 2ª iteración del ejemplo II,a)

ITERACION 3												
Posición asumida para el c.d.g.: Y_g = -54.5 Z_g = -59.2. Eje neutro asumido: +0.572Y +1.000Z +90.404 = 0												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Larguerillo		A_l	Y	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot A$
Nº	Tipo	(mm^2)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm^2)	(N/mm^2)	(mm^2)	(mm^2)	(σ_r/σ_l)	(mm
1	L2	70.0	0.0	382.0	410.1	-5.379	-376.5	-249.5	36.2	106.2	0.663	70
2	L1	100.0	146.2	352.9	457.4	-6.000	-420.0	-300.0	31.8	131.8	0.714	94.
3	L2	70.0	270.1	270.1	447.1	-5.864	-410.5	-250.0	36.1	106.1	0.609	64.
4	L2	70.0	352.9	146.2	380.6	-4.992	-349.5	-248.0	36.3	106.3	0.710	75.
5	L3	50.0	382.0	0.0	268.1	-3.517	-246.2	-190.2	43.8	93.8	0.772	72.
6	L3	50.0	352.9	-146.2	126.8	-1.663	-116.4	-116.4	61.9	111.9	1.000	111
7	L3	50.0	270.1	-270.1	-21.9	0.287	20.1	20.1	120.0	170.0	1.000	170.
8	L3	50.0	146.2	-352.9	-155.3	2.037	142.6	142.6	120.0	170.0	1.000	170.
9	L3	50.0	0.0	-382.0	-253.1	3.320	232.4	232.4	120.0	170.0	1.000	170.
10	L3	50.0	-146.2	-352.9	-300.5	3.941	275.9	275.9	120.0	170.0	1.000	170.
11	L3	50.0	-270.1	-270.1	-290.1	3.806	266.4	266.4	120.0	170.0	1.000	170.
12	L3	50.0	-352.9	-146.2	-223.6	2.934	205.4	205.4	120.0	170.0	1.000	170.
13	L3	50.0	-382.0	0.0	-111.2	1.459	102.1	102.1	120.0	170.0	1.000	170.
14	L2	70.0	-352.9	146.2	30.1	-0.395	-27.7	-27.7	120.0	190.0	1.000	190.
15	L2	70.0	-270.1	270.1	178.8	-2.346	-164.2	-164.2	48.6	118.6	1.000	118.
16	L1	100.0	-146.2	352.9	312.2	-4.096	-286.7	-277.3	33.6	133.6	0.967	129.

$$\text{Area} = 2117.\ \text{mm}^2; \qquad Y_g = -55.7\ \text{mm}; \qquad Z_g = -58.6\ \text{mm}$$

$$I_{yy} = 1.4784813\text{E}{+}08\ \text{mm}^4; \quad I_{zz} = 1.4720682\text{E}{+}08\ \text{mm}^4; \quad I_{yz} = -1.5568910\text{E}{+}07\ \text{mm}^4$$

Eje neutro obtenido: +0.577Y +1.000Z +90.750 = 0

Tabla 8.9: Cálculos correspondientes a la 3ª iteración del ejemplo II,a)

ITERACION 1													
Posición asumida para el c.d.g.: Y_g = +0.0 Z_g = -158.2. Eje neutro asumido: +0.414Y +1.000Z +158.230 = (													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Larguerillo		A_l	Y	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot$
Nº	Tipo	(mm^2)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm^2)	(N/mm^2)	(mm^2)	(mm^2)	(σ_r/σ_l)	(mm
1	L2	70.0	0.0	382.0	499.1	-5.670	-396.9	-250.0	36.1	106.1	0.630	66
2	L1	100.0	146.2	352.9	528.2	-6.000	-420.0	-300.0	31.8	131.8	0.714	94
3	L2	70.0	270.1	270.1	499.1	-5.670	-396.9	-250.0	36.1	106.1	0.630	66
4	L2	70.0	352.9	146.2	416.3	-4.729	-331.0	-250.0	36.1	106.1	0.755	80
5	L3	50.0	382.0	0.0	292.4	-3.321	-232.5	-200.0	42.3	92.3	0.860	79
6	L3	50.0	352.9	-146.2	146.2	-1.661	-116.2	-116.2	62.0	112.0	1.000	112
7	L3	50.0	270.1	-270.1	0.0	0.000	0.0	0.0	120.0	170.0	1.000	170
8	L3	50.0	146.2	-352.9	-123.9	1.408	98.5	98.5	120.0	170.0	1.000	170
9	L3	50.0	0.0	-382.0	-206.7	2.348	164.4	164.4	120.0	170.0	1.000	170
10	L3	50.0	-146.2	-352.9	-235.8	2.679	187.5	187.5	120.0	170.0	1.000	170
11	L3	50.0	-270.1	-270.1	-206.7	2.348	164.4	164.4	120.0	170.0	1.000	170
12	L3	50.0	-352.9	-146.2	-123.9	1.408	98.5	98.5	120.0	170.0	1.000	170
13	L3	50.0	-382.0	0.0	0.0	0.000	0.0	0.0	120.0	170.0	1.000	170
14	L2	70.0	-352.9	146.2	146.2	-1.661	-116.2	-116.3	62.0	132.0	1.000	132
15	L2	70.0	-270.1	270.1	292.4	-3.321	-232.5	-232.5	38.0	108.0	1.000	108
16	L1	100.0	-146.2	352.9	416.3	-4.729	-331.0	-300.0	31.8	131.8	0.906	119

Area = 2049. mm^2; Y_g = -43.1 mm; Z_g = -67.8 mm

I_{yy} = 1.4222632E+08 mm^4; I_{zz} = 1.4353926E+08 mm^4; I_{yz} = -9972504. mm^4

Eje neutro obtenido: +0.546Y +1.000Z +91.285 = 0

Tabla 8.10: Cálculos correspondientes a la 1ª iteración del ejemplo II,b)

ITERACION 2													
Posición asumida para el c.d.g.: Y_g = -43.1 Z_g = -67.8. Eje neutro asumido: +0.546Y +1.000Z +91.285 = 0													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
Larguerillo		A_l	Y	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot$
Nº	Tipo	(mm^2)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm^2)	(N/mm^2)	(mm^2)	(mm^2)	(σ_r/σ_l)	(mı
1	L2	70.0	0.0	382.0	415.4	-5.419	-379.3	-250.0	36.1	106.1	0.659	6
2	L1	100.0	146.2	352.9	459.9	-6.000	-420.0	-300.0	31.8	131.8	0.714	9
3	L2	70.0	270.1	270.1	446.6	-5.827	-407.9	-250.0	36.1	106.1	0.613	6
4	L2	70.0	352.9	146.2	377.5	-4.925	-344.8	-250.0	36.1	106.1	0.725	7
5	L3	50.0	382.0	0.0	263.2	-3.433	-240.3	-200.0	42.3	92.3	0.832	7
6	L3	50.0	352.9	-146.2	120.9	-1.578	-110.4	-110.4	64.3	114.3	1.000	11
7	L3	50.0	270.1	-270.1	-27.5	0.359	25.1	25.1	120.0	170.0	1.000	17
8	L3	50.0	146.2	-352.9	-159.6	2.082	145.7	145.7	120.0	170.0	1.000	17
9	L3	50.0	0.0	-382.0	-255.2	3.329	233.0	233.0	120.0	170.0	1.000	17
10	L3	50.0	-146.2	-352.9	-299.7	3.910	273.7	273.7	120.0	170.0	1.000	17
11	L3	50.0	-270.1	-270.1	-286.4	3.736	261.5	261.5	120.0	170.0	1.000	17
12	L3	50.0	-352.9	-146.2	-217.3	2.835	198.4	198.4	120.0	170.0	1.000	17
13	L3	50.0	-382.0	0.0	-102.9	1.343	94.0	94.0	120.0	170.0	1.000	17
14	L2	70.0	-352.9	146.2	39.3	-0.513	-35.9	-35.9	120.0	190.0	1.000	19
15	L2	70.0	-270.1	270.1	187.8	-2.450	-171.5	-171.5	47.1	117.1	1.000	11
16	L1	100.0	-146.2	352.9	319.8	-4.172	-292.1	-292.0	32.4	132.4	1.000	13

Area = 2127. mm^2; Y_g = -54.0 mm; Z_g = -58.1 mm

I_{yy} = 1.4828933E+08 mm^4; I_{zz} = 1.4868147E+08 mm^4; I_{yz} = -1.5400073E+07 mm^4

Eje neutro obtenido: +0.573Y +1.000Z +88.973 = 0

Tabla 8.11: Cálculos correspondientes a la 2ª iteración del ejemplo II,b)

ITERACION 3													
Posición asumida para el c.d.g.: Y_g = -54.0 Z_g = -58.1. Eje neutro asumido: +0.573Y +1.000Z +88.973 = 0													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
Larguerillo		A_l	Y	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot$
N^o	Tipo	(mm^2)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm^2)	(N/mm^2)	(mm^2)	(mm^2)	(σ_r/σ_l)	(mn
1	L2	70.0	0.0	382.0	408.7	-5.376	-376.3	-250.0	36.1	106.1	0.664	7
2	L1	100.0	146.2	352.9	456.1	-6.000	-420.0	-300.0	31.8	131.8	0.714	9
3	L2	70.0	270.1	270.1	445.8	-5.865	-410.5	-250.0	36.1	106.1	0.609	6
4	L2	70.0	352.9	146.2	379.4	-4.991	-349.4	-250.0	36.1	106.1	0.716	7
5	L3	50.0	382.0	0.0	267.0	-3.513	-245.9	-200.0	42.3	92.3	0.813	7
6	L3	50.0	352.9	-146.2	125.7	-1.654	-115.8	-115.8	62.2	112.2	1.000	11
7	L3	50.0	270.1	-270.1	-23.0	0.302	21.2	21.2	120.0	170.0	1.000	17
8	L3	50.0	146.2	-352.9	-156.4	2.058	144.0	144.0	120.0	170.0	1.000	17
9	L3	50.0	0.0	-382.0	-254.3	3.345	234.2	234.2	120.0	170.0	1.000	17
10	L3	50.0	-146.2	-352.9	-301.7	3.969	277.8	277.8	120.0	170.0	1.000	17
11	L3	50.0	-270.1	-270.1	-291.4	3.833	268.3	268.3	120.0	170.0	1.000	17
12	L3	50.0	-352.9	-146.2	-225.0	2.960	207.2	207.2	120.0	170.0	1.000	17
13	L3	50.0	-382.0	0.0	-112.6	1.481	103.7	103.7	120.0	170.0	1.000	17
14	L2	70.0	-352.9	146.2	28.7	-0.378	-26.4	-26.4	120.0	190.0	1.000	19
15	L2	70.0	-270.1	270.1	177.4	-2.334	-163.3	-163.4	48.8	118.8	1.000	118
16	L1	100.0	-146.2	352.9	310.8	-4.089	-286.2	-286.2	32.8	132.8	1.000	132

Area = 2124. mm^2; Y_g = -55.2 mm; Z_g = -57.7 mm

I_{yy} = 1.4854149E+08 mm^4; I_{zz} = 1.4786942E+08 mm^4; I_{yz} = -1.5618820E+07 mm^4

Eje neutro obtenido: +0.577Y +1.000Z +89.586 = 0

Tabla 8.12: Cálculos correspondientes a la 3ª iteración del ejemplo II,b)

ITERACION 1												
Posición asumida para el c.d.g.: Y_g = +0.0 Z_g = -158.2. Eje neutro asumido: +0.414Y +1.000Z +158.230 =												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
Larguerillo		A_l	Y	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot$
N°	Tipo	(mm²)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm²)	(N/mm²)	(mm²)	(mm²)	(σ_r/σ_l)	(mı
1	L2	70.0	0.0	382.0	499.1	-2.835	-198.4	-198.4	42.5	112.5	1.000	11
2	L1	100.0	146.2	352.9	528.2	-3.000	-210.0	-210.0	40.8	140.8	1.000	14
3	L2	70.0	270.1	270.1	499.1	-2.835	-198.4	-198.4	42.5	112.5	1.000	11
4	L2	70.0	352.9	146.2	416.3	-2.365	-165.5	-165.5	48.3	118.3	1.000	11
5	L3	50.0	382.0	0.0	292.4	-1.661	-116.2	-116.2	62.0	112.0	1.000	11
6	L3	50.0	352.9	-146.2	146.2	-0.830	-58.1	-58.1	100.0	150.0	1.000	15
7	L3	50.0	270.1	-270.1	0.0	0.000	0.0	0.0	120.0	170.0	1.000	17
8	L3	50.0	146.2	-352.9	-123.9	0.704	49.3	49.3	120.0	170.0	1.000	17
9	L3	50.0	0.0	-382.0	-206.7	1.174	82.2	82.2	120.0	170.0	1.000	17
10	L3	50.0	-146.2	-352.9	-235.8	1.339	93.8	93.8	120.0	170.0	1.000	17
11	L3	50.0	-270.1	-270.1	-206.7	1.174	82.2	82.2	120.0	170.0	1.000	17
12	L3	50.0	-352.9	-146.2	-123.9	0.704	49.3	49.3	120.0	170.0	1.000	17
13	L3	50.0	-382.0	0.0	0.0	0.000	0.0	0.0	120.0	170.0	1.000	17
14	L2	70.0	-352.9	146.2	146.2	-0.830	-58.1	-58.1	100.0	170.0	1.000	17
15	L2	70.0	-270.1	270.1	292.4	-1.661	-116.2	-116.2	62.0	132.0	1.000	13
16	L1	100.0	-146.2	352.9	416.3	-2.365	-165.5	-165.5	48.3	148.3	1.000	14

Area = 2387. mm²; Y_g = -22.6 mm; Z_g = -29.5 mm

I_{yy} = 1.7316488E+08 mm⁴; I_{zz} = 1.7179990E+08 mm⁴; I_{yz} = -5028778. mm⁴

Eje neutro obtenido: +0.526Y +1.000Z +41.330 = 0

Tabla 8.13: Cálculos correspondientes a la 1ª iteración del ejemplo III,a)

ITERACION 2													
Posición asumida para el c.d.g.: Y_g = -22.6 Z_g = -29.5. Eje neutro asumido: +0.526Y +1.000Z +41.330 = (													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
Larguerillo		A_l	Y	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c\cdot$
Nº	Tipo	(mm^2)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm^2)	(N/mm^2)	(mm^2)	(mm^2)	(σ_r/σ_l)	(m
1	L2	70.0	0.0	382.0	374.7	-2.837	-198.6	-198.6	42.5	112.5	1.000	11
2	L1	100.0	146.2	352.9	417.0	-3.157	-221.0	-221.0	39.4	139.4	1.000	13
3	L2	70.0	270.1	270.1	401.4	-3.039	-212.7	-211.6	40.6	110.6	0.995	11
4	L2	70.0	352.9	146.2	330.2	-2.500	-175.0	-175.0	46.5	116.5	1.000	11
5	L3	50.0	382.0	0.0	214.3	-1.623	-113.6	-113.6	63.0	113.0	1.000	11
6	L3	50.0	352.9	-146.2	71.4	-0.540	-37.8	-37.8	120.0	170.0	1.000	17
7	L3	50.0	270.1	-270.1	-76.9	0.582	40.7	40.7	120.0	170.0	1.000	17
8	L3	50.0	146.2	-352.9	-207.8	1.573	110.1	110.1	120.0	170.0	1.000	17
9	L3	50.0	0.0	-382.0	-301.6	2.283	159.8	159.8	120.0	170.0	1.000	17
10	L3	50.0	-146.2	-352.9	-343.8	2.603	182.2	182.2	120.0	170.0	1.000	17
11	L3	50.0	-270.1	-270.1	-328.2	2.485	173.9	173.9	120.0	170.0	1.000	17
12	L3	50.0	-352.9	-146.2	-257.0	1.946	136.2	136.2	120.0	170.0	1.000	17
13	L3	50.0	-382.0	0.0	-141.1	1.069	74.8	74.8	120.0	170.0	1.000	17
14	L2	70.0	-352.9	146.2	1.8	-0.014	-1.0	-1.0	120.0	190.0	1.000	19
15	L2	70.0	-270.1	270.1	150.0	-1.136	-79.5	-79.5	80.8	150.8	1.000	15
16	L1	100.0	-146.2	352.9	281.0	-2.127	-148.9	-148.9	52.1	152.1	1.000	15

Area = 2444. mm^2; Y_g = -24.8 mm; Z_g = -26.8 mm

I_{yy} = 1.7577738E+08 mm^4; I_{zz} = 1.7765341E+08 mm^4; I_{yz} = -9045974. mm^4

Eje neutro obtenido: +0.532Y +1.000Z +39.952 = 0

Tabla 8.14: Cálculos correspondientes a la 2ª iteración del ejemplo III,a)

ITERACION 3													
Posición asumida para el c.d.g.: Y_g = -24.8 Z_g = -26.8. Eje neutro asumido: +0.532Y +1.000Z +39.952 = 0													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Larguerillo		A_l	Y	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot A_l$
Nº	Tipo	(mm²)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm²)	(N/mm²)	(mm²)	(mm²)	(σ_r/σ_l)	(mm²
1	L2	70.0	0.0	382.0	372.5	-2.821	-197.4	-197.4	42.7	112.7	1.000	112.
2	L1	100.0	146.2	352.9	415.5	-3.146	-220.2	-220.2	39.5	139.5	1.000	139.
3	L2	70.0	270.1	270.1	400.6	-3.034	-212.3	-211.3	40.7	110.7	0.995	110.
4	L2	70.0	352.9	146.2	330.1	-2.500	-175.0	-175.0	46.5	116.5	1.000	116.
5	L3	50.0	382.0	0.0	214.7	-1.626	-113.8	-113.8	62.9	112.9	1.000	112.
6	L3	50.0	352.9	-146.2	72.0	-0.545	-38.2	-38.2	120.0	170.0	1.000	170.
7	L3	50.0	270.1	-270.1	-76.3	0.578	40.4	40.4	120.0	170.0	1.000	170.
8	L3	50.0	146.2	-352.9	-207.6	1.572	110.1	110.1	120.0	170.0	1.000	170.
9	L3	50.0	0.0	-382.0	-302.0	2.287	160.1	160.1	120.0	170.0	1.000	170.
10	L3	50.0	-146.2	-352.9	-345.0	2.612	182.8	182.8	120.0	170.0	1.000	170.
11	L3	50.0	-270.1	-270.1	-330.1	2.499	175.0	175.0	120.0	170.0	1.000	170.
12	L3	50.0	-352.9	-146.2	-259.6	1.965	137.6	137.6	120.0	170.0	1.000	170.
13	L3	50.0	-382.0	0.0	-144.2	1.092	76.4	76.4	120.0	170.0	1.000	170.
14	L2	70.0	-352.9	146.2	-1.5	0.011	0.8	0.8	120.0	190.0	1.000	190.
15	L2	70.0	-270.1	270.1	146.8	-1.112	-77.8	-77.8	82.0	152.0	1.000	152.
16	L1	100.0	-146.2	352.9	278.2	-2.106	-147.4	-147.4	52.4	152.4	1.000	152.

Area = 2446. mm²; Y_g = -24.9 mm; Z_g = -26.5 mm

I_{yy} = 1.7598872E+08 mm⁴; I_{zz} = 1.7772885E+08 mm⁴; I_{yz} = -9133055. mm⁴

Eje neutro obtenido: +0.533Y +1.000Z +39.780 = 0

Tabla 8.15: Cálculos correspondientes a la 3ª iteración del ejemplo III,a)

ITERACION 1

Posición asumida para el c.d.g.: Y_g = +0.0 Z_g = -158.2. Eje neutro asumido: +0.414Y +1.000Z +158.230 = (

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Larguerillo		A_l	Y	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot$
Nº	Tipo	(mm^2)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm^2)	(N/mm^2)	(mm^2)	(mm^2)	(σ_r/σ_l)	(mm
1	L2	70.0	0.0	382.0	499.1	-2.835	-198.4	-198.5	42.5	112.5	1.000	11
2	L1	100.0	146.2	352.9	528.2	-3.000	-210.0	-210.0	40.8	140.8	1.000	14
3	L2	70.0	270.1	270.1	499.1	-2.835	-198.4	-198.5	42.5	112.5	1.000	11
4	L2	70.0	352.9	146.2	416.3	-2.365	-165.5	-165.5	48.3	118.3	1.000	11
5	L3	50.0	382.0	0.0	292.4	-1.661	-116.2	-116.2	62.0	112.0	1.000	11
6	L3	50.0	352.9	-146.2	146.2	-0.830	-58.1	-58.1	100.0	150.0	1.000	15
7	L3	50.0	270.1	-270.1	0.0	0.000	0.0	0.0	120.0	170.0	1.000	17
8	L3	50.0	146.2	-352.9	-123.9	0.704	49.3	49.3	120.0	170.0	1.000	17
9	L3	50.0	0.0	-382.0	-206.7	1.174	82.2	82.2	120.0	170.0	1.000	17
10	L3	50.0	-146.2	-352.9	-235.8	1.339	93.8	93.8	120.0	170.0	1.000	17
11	L3	50.0	-270.1	-270.1	-206.7	1.174	82.2	82.2	120.0	170.0	1.000	17
12	L3	50.0	-352.9	-146.2	-123.9	0.704	49.3	49.3	120.0	170.0	1.000	17
13	L3	50.0	-382.0	0.0	0.0	0.000	0.0	0.0	120.0	170.0	1.000	17
14	L2	70.0	-352.9	146.2	146.2	-0.830	-58.1	-58.1	100.0	170.0	1.000	17
15	L2	70.0	-270.1	270.1	292.4	-1.661	-116.2	-116.3	62.0	132.0	1.000	13
16	L1	100.0	-146.2	352.9	416.3	-2.365	-165.5	-165.5	48.3	148.3	1.000	14

$$\text{Area} = 2387.\ \text{mm}^2; \qquad Y_g = \text{-22.6 mm}; \qquad Z_g = \text{-29.5 mm}$$

$$I_{yy} = 1.7316693\text{E}{+}08\ \text{mm}^4; \quad I_{zz} = 1.7180501\text{E}{+}08\ \text{mm}^4; \quad I_{yz} = -5028918.\ \text{mm}^4$$

Eje neutro obtenido: +0.526Y +1.000Z +41.326 = 0

Tabla 8.16: Cálculos correspondientes a la 1ª iteración del ejemplo III,b)

ITERACION 2												
Posición asumida para el c.d.g.: Y_g = -22.6 Z_g = -29.5. Eje neutro asumido: +0.526Y +1.000Z +41.326 =												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
Larguerillo		A_l	Y	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c\cdot$
N^o	Tipo	(mm^2)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm^2)	(N/mm^2)	(mm^2)	(mm^2)	(σ_r/σ_l)	(m
1	L2	70.0	0.0	382.0	374.7	-2.837	-198.6	-198.6	42.5	112.5	1.000	1
2	L1	100.0	146.2	352.9	417.0	-3.157	-221.0	-221.0	39.4	139.4	1.000	1
3	L2	70.0	270.1	270.1	401.3	-3.039	-212.7	-212.7	40.5	110.5	1.000	1
4	L2	70.0	352.9	146.2	330.2	-2.500	-175.0	-175.0	46.4	116.4	1.000	1
5	L3	50.0	382.0	0.0	214.3	-1.622	-113.6	-113.6	63.0	113.0	1.000	1
6	L3	50.0	352.9	-146.2	71.4	-0.540	-37.8	-37.8	120.0	170.0	1.000	1
7	L3	50.0	270.1	-270.1	-76.9	0.582	40.7	40.7	120.0	170.0	1.000	1
8	L3	50.0	146.2	-352.9	-207.8	1.573	110.1	110.1	120.0	170.0	1.000	1
9	L3	50.0	0.0	-382.0	-301.6	2.283	159.8	159.8	120.0	170.0	1.000	1
10	L3	50.0	-146.2	-352.9	-343.8	2.603	182.2	182.2	120.0	170.0	1.000	17
11	L3	50.0	-270.1	-270.1	-328.2	2.485	173.9	173.9	120.0	170.0	1.000	17
12	L3	50.0	-352.9	-146.2	-257.0	1.946	136.2	136.2	120.0	170.0	1.000	17
13	L3	50.0	-382.0	0.0	-141.1	1.069	74.8	74.8	120.0	170.0	1.000	17
14	L2	70.0	-352.9	146.2	1.8	-0.014	-1.0	-1.0	120.0	190.0	1.000	19
15	L2	70.0	-270.1	270.1	150.0	-1.136	-79.5	-79.5	80.8	150.8	1.000	15
16	L1	100.0	-146.2	352.9	281.0	-2.127	-148.9	-148.9	52.1	152.1	1.000	15

Area = 2445. mm^2; Y_g = -24.7 mm; Z_g = -26.7 mm

I_{yy} = 1.7581981E+08 mm^4; I_{zz} = 1.7769989E+08 mm^4; I_{yz} = -9007666. mm^4

Eje neutro obtenido: +0.532Y +1.000Z +39.860 = 0

Tabla 8.17: Cálculos correspondientes a la 2ª iteración del ejemplo III,b)

ITERACION 3												
Posición asumida para el c.d.g.: Y_g = -24.7 Z_g = -26.7. Eje neutro asumido: +0.532Y +1.000Z +39.860 = 0												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Larguerillo		A_l	Y	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot A$
Nº	Tipo	(mm²)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm²)	(N/mm²)	(mm²)	(mm²)	(σ_r/σ_l)	(mm
1	L2	70.0	0.0	382.0	372.4	-2.819	-197.3	-197.4	42.7	112.7	1.000	112
2	L1	100.0	146.2	352.9	415.4	-3.144	-220.1	-220.1	39.5	139.5	1.000	139
3	L2	70.0	270.1	270.1	400.5	-3.031	-212.2	-212.2	40.5	110.5	1.000	110
4	L2	70.0	352.9	146.2	330.0	-2.498	-174.8	-174.9	46.5	116.5	1.000	116
5	L3	50.0	382.0	0.0	214.6	-1.624	-113.7	-113.7	63.0	113.0	1.000	113
6	L3	50.0	352.9	-146.2	71.9	-0.544	-38.1	-38.1	120.0	170.0	1.000	170
7	L3	50.0	270.1	-270.1	-76.4	0.579	40.5	40.5	120.0	170.0	1.000	170
8	L3	50.0	146.2	-352.9	-207.7	1.572	110.1	110.1	120.0	170.0	1.000	170
9	L3	50.0	0.0	-382.0	-302.1	2.286	160.0	160.0	120.0	170.0	1.000	170
10	L3	50.0	-146.2	-352.9	-345.0	2.612	182.8	182.8	120.0	170.0	1.000	170
11	L3	50.0	-270.1	-270.1	-330.1	2.499	174.9	174.9	120.0	170.0	1.000	170
12	L3	50.0	-352.9	-146.2	-259.6	1.965	137.5	137.5	120.0	170.0	1.000	170
13	L3	50.0	-382.0	0.0	-144.2	1.091	76.4	76.4	120.0	170.0	1.000	170
14	L2	70.0	-352.9	146.2	-1.5	0.011	0.8	0.8	120.0	190.0	1.000	190.
15	L2	70.0	-270.1	270.1	146.8	-1.111	-77.8	-77.8	82.0	152.0	1.000	152.
16	L1	100.0	-146.2	352.9	278.1	-2.105	-147.4	-147.3	52.5	152.5	1.000	152.

Area = 2447. mm²; Y_g = -24.9 mm; Z_g = -26.4 mm

I_{yy} = 1.7603901E+08 mm⁴; I_{zz} = 1.7778301E+08 mm⁴; I_{yz} = -9097273. mm⁴

Eje neutro obtenido: +0.533Y +1.000Z +39.677 = 0

Tabla 8.18: Cálculos correspondientes a la 3ª iteración del ejemplo III,b)

Resolución de punto IV

Los flujos de cortadura se determinarán para la sección efectiva obtenida en el Punto III,a).

Antes de determinar los flujos de cortadura en los paneles es necesario calcular las componentes según los ejes Y y Z de las cargas en los *booms*. Estas se calcularán mediante las expresiones:

$$P_y = \frac{\delta y}{\delta x} P_x \qquad P_z = \frac{\delta z}{\delta x} P_x$$

En este caso:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{R_A - R_O}{X_A - X_O} \sin\theta = \frac{382 - 255}{4000} \sin\theta$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{R_A - R_O}{X_A - X_O} \cos\theta = \frac{382 - 255}{4000} \cos\theta$$

siendo θ el ángulo que forma el eje $+Z$ con la recta que une el *boom* y el centro geométrico de la sección A.

Los valores de P_x se obtienen a partir de los esfuerzos y áreas indicados en la tabla 8.15:

$$P_x = cA_b\sigma_l = A_b\sigma_r$$

En la tabla 8.19 se incluyen los cálculos necesarios para determinar los valores de P_y y P_z.

Boom	$\delta y/\delta x$	$\delta z/\delta x$	P_x	P_y	P_z
1	0.00000	0.03175	−22243	0	−706
2	0.01215	0.02933	−30720	−373	−901
3	0.02245	0.02245	−23386	−525	−525
4	0.02933	0.01215	−20377	−598	−248
5	0.03175	0.00000	−12852	−408	0
6	0.02933	−0.01215	−6488	−190	79
7	0.02245	−0.02245	6876	154	−154
8	0.01215	−0.02933	18710	227	−549
9	0.00000	−0.03175	27211	0	−864
10	−0.01215	−0.02933	31086	−378	−912
11	−0.02245	−0.02245	29744	−668	−668
12	−0.02933	−0.01215	23390	−686	−284
13	−0.03175	0.00000	12992	−412	0
14	−0.02933	0.01215	147	−4	2
15	−0.02245	0.02245	−11831	266	−266
16	−0.01215	0.02933	−22475	273	−659

Tabla 8.19: Componentes de las cargas axiales en los *booms*

A continuación se determinarán los flujos de cortadura en los paneles utilizando los dos procedimientos descritos en el Apartado 8.5, es decir:

(a) A partir de las fuerzas cortantes en la sección.

(b) A partir de la variación de las fuerzas axiales en los *booms* entre dos secciones del fuselaje.

Cálculo a partir de las fuerzas cortantes en la sección

En primer lugar es necesario calcular las fuerzas cortantes resistidas por el revestimiento:

$$S_{w_y} = S_y - \sum_r P_{r_y} = -10000 - (-3322) = -6678\ N$$

$$S_{w_z} = S_z - \sum_r P_{r_z} = -20000 - (-6655) = -13345\ N$$

A continuación se calcularán los flujos cortantes en los paneles suponiendo que la sección está abierta por el panel entre los *booms* 2 y 3:

$$q_{b_{r,r+1}} = q_{b_{r-1,r}} - [(k_3 S_{w_y} - k_1 S_{w_z})(Y_r - Y_g) + (k_2 S_{w_z} - k_1 S_{w_y})(Z_r - Z_g)]cA_{b_r}$$

Los valores de k_1, k_2 y k_3 se obtienen a partir de las propiedades de la sección efectiva. De la tabla 8.15:

$$k_1 = \frac{I_{yz}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} = -0.29277 \times 10^{-9}$$

$$k_2 = \frac{I_{zz}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} = 5.69738 \times 10^{-9}$$

$$k_3 = \frac{I_{yy}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} = 5.64159 \times 10^{-9}$$

Luego:

$$q_{b_{r,r+1}} = q_{b_{r-1,r}} + [4.15816 \times 10^{-5}(Y_r + 24.9) + 7.79866 \times 10^{-5}(Z_r + 26.5)]cA_{b_r}$$

$$q_{b_{2,3}} = 0$$

$$q_{b_{3,4}} = q_{b_{2,3}} + [4.15816\times10^{-5}(Y_3+24.9)+7.79866\times10^{-5}(Z_3+26.5)]cA_{b_3} = 3.90\ N/mm$$

$$q_{b_{4,5}} = q_{b_{3,4}} + [4.15816\times10^{-5}(Y_4+24.9)+7.79866\times10^{-5}(Z_4+26.5)]cA_{b_4} = 7.30\ N/mm$$

$$q_{b_{5,6}} = q_{b_{4,5}} + [4.15816\times10^{-5}(Y_5+24.9)+7.79866\times10^{-5}(Z_5+26.5)]cA_{b_5} = 9.44\ N/mm$$

$$q_{b_{6,7}} = q_{b_{5,6}} + [4.15816\times10^{-5}(Y_6+24.9)+7.79866\times10^{-5}(Z_6+26.5)]cA_{b_6} = 10.52\ N/mm$$

$$q_{b_{7,8}} = q_{b_{6,7}} + [4.15816\times10^{-5}(Y_7+24.9)+7.79866\times10^{-5}(Z_7+26.5)]cA_{b_7} = 9.38\ N/mm$$

$$q_{b_{8,9}} = q_{b_{7,8}} + [4.15816\times10^{-5}(Y_8+24.9)+7.79866\times10^{-5}(Z_8+26.5)]cA_{b_8} = 6.26\ N/mm$$

$$q_{b_{9,10}} = q_{b_{8,9}} + [4.15816\times10^{-5}(Y_9+24.9)+7.79866\times10^{-5}(Z_9+26.5)]cA_{b_9} = 1.72\ N/mm$$

$$q_{b_{10,11}} = q_{b_{9,10}} + [4.15816\times10^{-5}(Y_{10}+24.9)+7.79866\times10^{-5}(Z_{10}+26.5)]cA_{b_{10}} = -3.46\ N/mm$$

$$q_{b_{11,12}} = q_{b_{10,11}} + [4.15816\times10^{-5}(Y_{11}+24.9)+7.79866\times10^{-5}(Z_{11}+26.5)]cA_{b_{11}} = -8.42\ N/mm$$

$$q_{b_{12,13}} = q_{b_{11,12}} + [4.15816\times10^{-5}(Y_{12}+24.9)+7.79866\times10^{-5}(Z_{12}+26.5)]cA_{b_{12}} = -12.33\ N/mm$$

$$q_{b_{13,14}} = q_{b_{12,13}} + [4.15816\times10^{-5}(Y_{13}+24.9)+7.79866\times10^{-5}(Z_{13}+26.5)]cA_{b_{13}} = -14.50\ N/mm$$

$$q_{b_{14,15}} = q_{b_{13,14}} + [4.15816\times10^{-5}(Y_{14}+24.9)+7.79866\times10^{-5}(Z_{14}+26.5)]cA_{b_{14}} = -14.53\ N/mm$$

$$q_{b_{15,16}} = q_{b_{14,15}} + [4.15816\times10^{-5}(Y_{15}+24.9)+7.79866\times10^{-5}(Z_{15}+26.5)]cA_{b_{15}} = -12.57\ N/mm$$

$$q_{b_{16,1}} = q_{b_{15,16}} + [4.15816\times10^{-5}(Y_{16}+24.9)+7.79866\times10^{-5}(Z_{16}+26.5)]cA_{b_{16}} = -8.83\ N/mm$$

$$q_{b_{1,2}} = q_{b_{16,1}} + [4.15816\times10^{-5}(Y_1+24.9)+7.79866\times10^{-5}(Z_1+26.5)]cA_{b_1} = -5.12\ N/mm$$

En consecuencia, el flujo en cada uno de los tramos de la sección será igual a los valores anteriores más un flujo incógnita q_I, que, en principio se supondrá que tiene el sentido contrario a las agujas del reloj. Para determinar el valor de q_I, se tomarán momentos de las cargas que actúan en el plano de la sección con respecto al centro geométrico de la misma (0,0). Se consideran positivos los momentos contrarios a las agujas del reloj.

- Momento de las solicitaciones:

$$M_S = M_x - S_y(Z_p - Z_o) + S_z(Y_p - Y_o)$$

Dado que el punto de aplicación de éstas es el centro geométrico de la sección, queda:

$$M_S = M_x = 20 \times 10^6\ N \cdot mm$$

- Momento de las componentes según los ejes Y y Z de las cargas en los *booms*:

$$M_P = -\sum_r P_{r_y}(Z_r - Z_o) + \sum_r P_{r_z}(Y_r - Y_o) = -126431 + 126431 = 0$$

- Momento de los flujos de cortadura que actúan en la sección:

$$M_q = 2\sum_n A_n q_{b_n} + 2A_I q_I$$

Para cualquier tramo:

$$A_n = \frac{\pi \times R_A^2}{16} = \frac{\pi \times 382^2}{16} = 28652\ mm^2$$

Y el área de la celda es:

$$A_I = \pi \times R_A^2 = \pi \times 382^2 = 458434\ mm^2$$

Por tanto, teniendo en cuenta los sentidos de q_{b_n}, queda:

$$M_q = 57304 \sum_n q_{b_n} + 916868 q_I = 57304 \times 31.24 + 916868 q_I$$

$$M_q = 1790177 + 916868 q_I$$

Estableciendo que:

$$M_S = M_P + M_q$$

queda:

$$20 \times 10^6 = 1790177 + 916868 q_I \Longrightarrow q_I = 19.86\ N/mm$$

En consecuencia, los flujos totales en los distintos tramos son (ver figura 8.8):

$q_{1,2}$	=	$q_{b_{1,2}}$	−	q_I	=	−5.12	−	19.86	=	−24.98 N/mm
$q_{2,3}$	=	$q_{b_{2,3}}$	−	q_I	=	0.00	−	19.86	=	−19.86 N/mm
$q_{3,4}$	=	$q_{b_{3,4}}$	−	q_I	=	3.90	−	19.86	=	−15.96 N/mm
$q_{4,5}$	=	$q_{b_{4,5}}$	−	q_I	=	7.30	−	19.86	=	−12.56 N/mm
$q_{5,6}$	=	$q_{b_{5,6}}$	−	q_I	=	9.44	−	19.86	=	−10.42 N/mm
$q_{6,7}$	=	$q_{b_{6,7}}$	−	q_I	=	10.52	−	19.86	=	−9.34 N/mm
$q_{7,8}$	=	$q_{b_{7,8}}$	−	q_I	=	9.38	−	19.86	=	−10.48 N/mm
$q_{8,9}$	=	$q_{b_{8,9}}$	−	q_I	=	6.26	−	19.86	=	−13.60 N/mm
$q_{9,10}$	=	$q_{b_{9,10}}$	−	q_I	=	1.72	−	19.86	=	−18.14 N/mm
$q_{10,11}$	=	$q_{b_{10,11}}$	−	q_I	=	−3.46	−	19.86	=	−23.32 N/mm
$q_{11,12}$	=	$q_{b_{11,12}}$	−	q_I	=	−8.42	−	19.86	=	−28.28 N/mm
$q_{12,13}$	=	$q_{b_{12,13}}$	−	q_I	=	−12.33	−	19.86	=	−32.19 N/mm
$q_{13,14}$	=	$q_{b_{13,14}}$	−	q_I	=	−14.50	−	19.86	=	−34.36 N/mm
$q_{14,15}$	=	$q_{b_{14,15}}$	−	q_I	=	−14.53	−	19.86	=	−34.39 N/mm
$q_{15,16}$	=	$q_{b_{15,16}}$	−	q_I	=	−12.57	−	19.86	=	−32.43 N/mm
$q_{16,1}$	=	$q_{b_{16,1}}$	−	q_I	=	−8.83	−	19.86	=	−28.69 N/mm

Cálculo a partir de la variación de las fuerzas axiales en los *booms*

Para determinar por este procedimiento los flujos cortantes en la sección A, se calcularán en primer lugar las fuerzas axiales en una sección B situada a 500 mm de ella. Esta sección tiene un radio de:

$$R_B = R_A - \frac{R_A - R_O}{X_A - X_O} \times 500 = 382 - \frac{382 - 255}{4000} \times 500 = 366.125\ mm$$

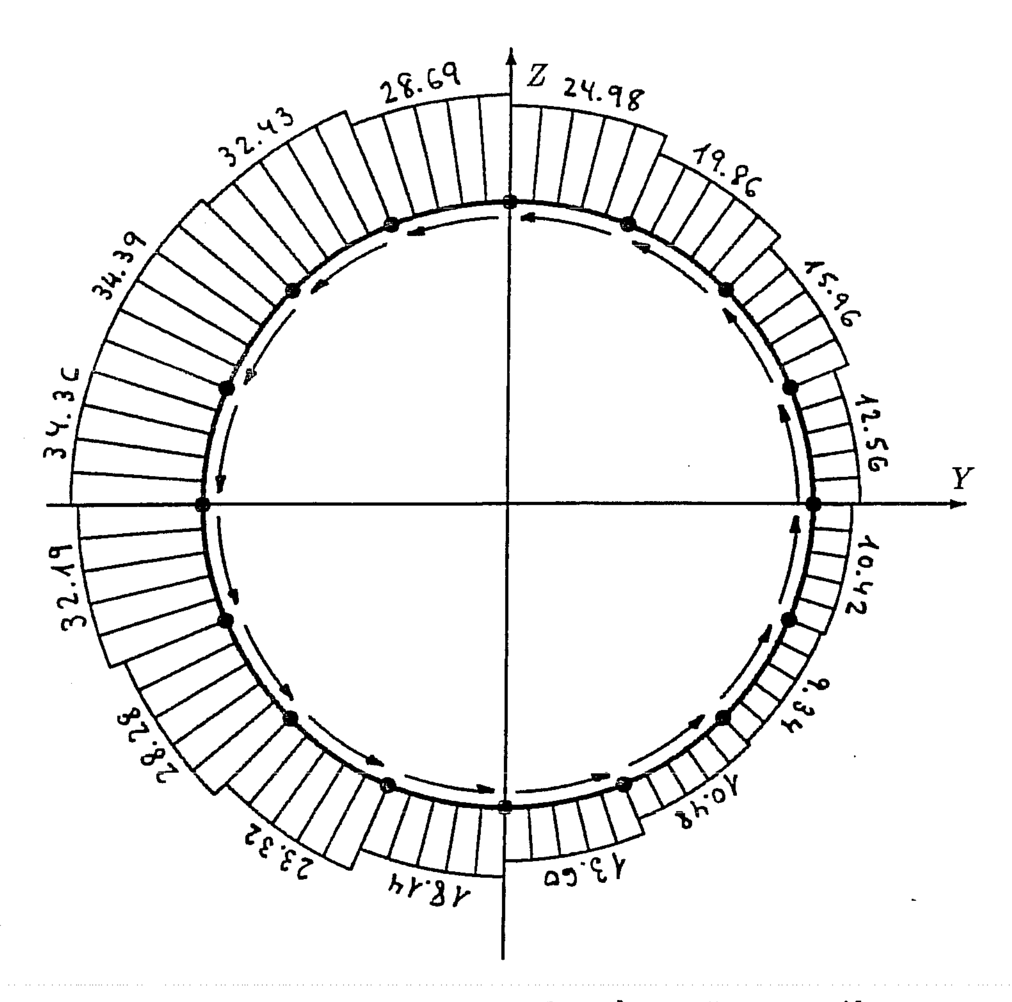


Figura 8.8: Flujos totales de cortadura [procedimiento a)]

y las solicitaciones existentes en ella son:

$$\begin{aligned} S_y &= -10000 \quad N \\ S_z &= -20000 \quad N \\ M_x &= 20\times10^6 \quad N\cdot mm \\ M_y &= 70\times10^6 \quad N\cdot mm \\ M_z &= 35\times10^6 \quad N\cdot mm \end{aligned}$$

En las tablas 8.20 a 8.22 se incluyen los cálculos necesarios para determinar los esfuerzos existentes en los *booms* de la sección B:

ITERACION 1													
Posición asumida para el c.d.g.: Y_g = +0.0 Z_g = -151.7. Eje neutro asumido: +0.414Y +1.000Z +151.654 =													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
Larguerillo		A_l	Y	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c\cdot$
Nº	Tipo	(mm²)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm²)	(N/mm²)	(mm²)	(mm²)	(σ_r/σ_l)	(mn
1	L2	70.0	0.0	366.1	478.4	-2.835	-198.4	-198.4	42.3	112.3	1.000	11
2	L1	100.0	140.1	338.3	506.2	-3.000	-210.0	-210.0	40.7	140.7	1.000	14
3	L2	70.0	258.9	258.9	478.4	-2.835	-198.4	-198.4	42.3	112.3	1.000	11
4	L2	70.0	338.3	140.1	399.0	-2.365	-165.5	-165.5	48.1	118.1	1.000	11
5	L3	50.0	366.1	0.0	280.2	-1.661	-116.2	-116.2	61.6	111.6	1.000	11
6	L3	50.0	338.3	-140.1	140.1	-0.830	-58.1	-58.1	98.8	148.8	1.000	14
7	L3	50.0	258.9	-258.9	0.0	0.000	0.0	0.0	115.0	165.0	1.000	16
8	L3	50.0	140.1	-338.3	-118.8	0.704	49.3	49.3	115.0	165.0	1.000	16
9	L3	50.0	0.0	-366.1	-198.1	1.174	82.2	82.2	115.0	165.0	1.000	16
10	L3	50.0	-140.1	-338.3	-226.0	1.339	93.8	93.8	115.0	165.0	1.000	16
11	L3	50.0	-258.9	-258.9	-198.1	1.174	82.2	82.2	115.0	165.0	1.000	16
12	L3	50.0	-338.3	-140.1	-118.8	0.704	49.3	49.3	115.0	165.0	1.000	16
13	L3	50.0	-366.1	0.0	0.0	0.000	0.0	0.0	115.0	165.0	0.000	
14	L2	70.0	-338.3	140.1	140.1	-0.830	-58.1	-58.1	98.8	168.8	1.000	16
15	L2	70.0	-258.9	258.9	280.2	-1.661	-116.2	-116.2	61.6	131.6	1.000	13
16	L1	100.0	-140.1	338.3	399.0	-2.365	-165.5	-165.5	48.1	148.1	1.000	14

Area = 2182. mm²; Y_g = 5.6 mm; Z_g = -27.2 mm

I_{yy} = 1.5661234E+08 mm⁴; I_{zz} = 1.3421746E+08 mm⁴; I_{yz} = -2942197. mm⁴

Eje neutro obtenido: +0.599Y +1.000Z +23.865 = 0

Tabla 8.20: Sección B: Cálculos correspondientes a la 1ª iteración

ITERACION 2												
Posición asumida para el c.d.g.: Y_g = +5.6 Z_g = -27.2. Eje neutro asumido: +0.599Y +1.000Z +23.865 = 0												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Larguerillo		A_l	Y	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot A$
Nº	Tipo	(mm²)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm²)	(N/mm²)	(mm²)	(mm²)	(σ_r/σ_l)	(mm
1	L2	70.0	0.0	366.1	334.6	-2.518	-176.3	-176.3	46.0	116.0	1.000	116
2	L1	100.0	140.1	338.3	382.7	-2.880	-201.6	-201.6	41.8	141.8	1.000	141
3	L2	70.0	258.9	258.9	375.6	-2.827	-197.9	-197.9	42.4	112.4	1.000	112
4	L2	70.0	338.3	140.1	314.5	-2.367	-165.7	-165.7	48.0	118.0	1.000	118
5	L3	50.0	366.1	0.0	208.6	-1.570	-109.9	-109.9	64.0	114.0	1.000	114
6	L3	50.0	338.3	-140.1	74.0	-0.557	-39.0	-39.0	115.0	165.0	1.000	165
7	L3	50.0	258.9	-258.9	-68.6	0.517	36.2	36.2	115.0	165.0	1.000	165
8	L3	50.0	140.1	-338.3	-197.8	1.488	104.2	104.2	115.0	165.0	1.000	165
9	L3	50.0	0.0	-366.1	-293.6	2.210	154.7	154.7	115.0	165.0	1.000	165
10	L3	50.0	-140.1	-338.3	-341.7	2.572	180.0	180.0	115.0	165.0	1.000	165
11	L3	50.0	-258.9	-258.9	-334.6	2.519	176.3	176.3	115.0	165.0	1.000	165
12	L3	50.0	-338.3	-140.1	-273.5	2.059	144.1	144.1	115.0	165.0	1.000	165
13	L3	50.0	-366.1	0.0	-167.6	1.262	88.3	88.3	115.0	165.0	1.000	165
14	L2	70.0	-338.3	140.1	-33.1	0.249	17.4	17.4	115.0	185.0	1.000	185
15	L2	70.0	-258.9	258.9	109.6	-0.825	-57.7	-57.7	99.2	169.2	1.000	169
16	L1	100.0	-140.1	338.3	238.7	-1.797	-125.8	-125.8	58.3	158.3	1.000	158.

Area = 2435. mm²; Y_g = -24.0 mm; Z_g = -18.2 mm

I_{yy} = 1.6237667E+08 mm⁴; I_{zz} = 1.6180627E+08 mm⁴; I_{yz} = -8824647. mm⁴

Eje neutro obtenido: +0.542Y +1.000Z +31.217 = 0

Tabla 8.21: Sección B: Cálculos correspondientes a la 2ª iteración

ITERACION 3												
Posición asumida para el c.d.g.: Y_g = -24.0 Z_g = -18.2. Eje neutro asumido: +0.542Y +1.000Z +31.217 = (												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
Larguerillo		A_l	Y	Z	d_l	$\varepsilon_a \times 10^3$	σ_l	σ_r	A_r	A_b	c	$c \cdot$
Nº	Tipo	(mm^2)	(mm)	(mm)	(mm)		(N/mm^2)	(N/mm^2)	(mm^2)	(mm^2)	(σ_r/σ_l)	(m
1	L2	70.0	0.0	366.1	349.4	-2.521	-176.5	-176.5	45.9	115.9	1.000	1
2	L1	100.0	140.1	338.3	391.6	-2.826	-197.8	-197.8	42.4	142.4	1.000	14
3	L2	70.0	258.9	258.9	378.4	-2.730	-191.1	-191.1	43.4	113.4	1.000	11
4	L2	70.0	338.3	140.1	311.7	-2.249	-157.5	-157.5	49.8	119.8	1.000	11
5	L3	50.0	366.1	0.0	201.8	-1.456	-101.9	-101.9	67.5	117.5	1.000	11
6	L3	50.0	338.3	-140.1	65.3	-0.471	-33.0	-33.0	115.0	165.0	1.000	16
7	L3	50.0	258.9	-258.9	-76.9	0.555	38.9	38.9	115.0	165.0	1.000	16
8	L3	50.0	140.1	-338.3	-203.3	1.467	102.7	102.7	115.0	165.0	1.000	16
9	L3	50.0	0.0	-366.1	-294.5	2.125	148.8	148.8	115.0	165.0	1.000	16
10	L3	50.0	-140.1	-338.3	-336.7	2.430	170.1	170.1	115.0	165.0	1.000	16
11	L3	50.0	-258.9	-258.9	-323.5	2.334	163.4	163.4	115.0	165.0	1.000	16
12	L3	50.0	-338.3	-140.1	-256.8	1.853	129.7	129.7	115.0	165.0	1.000	16
13	L3	50.0	-366.1	0.0	-146.9	1.060	74.2	74.2	115.0	165.0	1.000	16
14	L2	70.0	-338.3	140.1	-10.4	0.075	5.3	5.3	115.0	185.0	1.000	18
15	L2	70.0	-258.9	258.9	131.8	-0.951	-66.6	-66.6	90.2	160.2	1.000	16
16	L1	100.0	-140.1	338.3	258.2	-1.863	-130.4	-130.4	56.8	156.8	1.000	15

Area = 2431. mm^2; Y_g = -22.1 mm; Z_g = -19.1 mm

I_{yy} = 1.6169430E+08 mm^4; I_{zz} = 1.6213493E+08 mm^4; I_{yz} = -7937720. mm^4

Eje neutro obtenido: +0.535Y +1.000Z +30.927 = 0

Tabla 8.22: Sección B: Cálculos correspondientes a la 3ª iteración

En la tabla 8.23 se incluyen los cálculos necesarios para determinar los valores de $\Delta P_{r_x}/\Delta x$.

Boom	$P_x\ (A)$	$P_x\ (B)$	ΔP_x	$\Delta P_x/\Delta x$
1	−22243	−20462	−1781	−3.56
2	−30720	−28168	−2552	−5.10
3	−23386	−21681	−1705	−3.41
4	−20377	−18860	−1517	−3.03
5	−12852	−11972	−880	−1.76
6	−6488	−5445	−1043	−2.09
7	6876	6412	464	0.93
8	18710	16944	1766	3.53
9	27211	24548	2663	5.33
10	31086	28067	3019	6.04
11	29744	26964	2780	5.56
12	23390	21408	1982	3.96
13	12992	12245	747	1.49
14	147	974	−827	−1.65
15	−11831	−10669	−1162	−2.32
16	−22475	−20449	−2026	−4.05

Tabla 8.23: Variación de las cargas axiales en los *booms* entre las secciones A y B

Si se supone que la sección está abierta por el panel entre los *booms* 2 y 3, los flujos cortantes en los paneles vienen dados por la expresión:

$$q_{b_{r,r+1}} = q_{b_{r-1,r}} - \frac{\Delta P_{r_x}}{\Delta x}$$

$$q_{b_{2,3}} = 0$$

$$q_{b_{3,4}} = q_{b_{2,3}} - \frac{\Delta P_{3_x}}{\Delta x} = 3.41\ N/mm$$

$$q_{b_{4,5}} = q_{b_{3,4}} - \frac{\Delta P_{4_x}}{\Delta x} = 6.44\ N/mm$$

$$q_{b_{5,6}} = q_{b_{4,5}} - \frac{\Delta P_{5_x}}{\Delta x} = 8.20\ N/mm$$

$$q_{b_{6,7}} = q_{b_{5,6}} - \frac{\Delta P_{6_x}}{\Delta x} = 10.29\ N/mm$$

$$q_{b_{7,8}} = q_{b_{6,7}} - \frac{\Delta P_{7_x}}{\Delta x} = 9.36\ N/mm$$

$$q_{b_{8,9}} = q_{b_{7,8}} - \frac{\Delta P_{8_x}}{\Delta x} = 5.83\ N/mm$$

$$q_{b_{9,10}} = q_{b_{8,9}} - \frac{\Delta P_{9_x}}{\Delta x} = 0.50\ N/mm$$

$$q_{b_{10,11}} = q_{b_{9,10}} - \frac{\Delta P_{10_x}}{\Delta x} = -5.54\ N/mm$$

$$q_{b_{11,12}} = q_{b_{10,11}} - \frac{\Delta P_{11_x}}{\Delta x} = -11.10\ N/mm$$
$$q_{b_{12,13}} = q_{b_{11,12}} - \frac{\Delta P_{12_x}}{\Delta x} = -15.06\ N/mm$$
$$q_{b_{13,14}} = q_{b_{12,13}} - \frac{\Delta P_{13_x}}{\Delta x} = -16.55\ N/mm$$
$$q_{b_{14,15}} = q_{b_{13,14}} - \frac{\Delta P_{14_x}}{\Delta x} = -14.90\ N/mm$$
$$q_{b_{15,16}} = q_{b_{14,15}} - \frac{\Delta P_{15_x}}{\Delta x} = -12.58\ N/mm$$
$$q_{b_{16,1}} = q_{b_{15,16}} - \frac{\Delta P_{16_x}}{\Delta x} = -8.53\ N/mm$$
$$q_{b_{1,2}} = q_{b_{16,1}} - \frac{\Delta P_{1_x}}{\Delta x} = -4.97\ N/mm$$

Los flujos obtenidos han de ser multiplicados por un factor k para tener en cuenta que los paneles tienen diferente anchura en las dos secciones. El valor del factor k es:

$$k = \frac{b_B}{b_A} = \frac{R_B\pi/8}{R_A\pi/8} = \frac{R_B}{R_A} = \frac{366.125}{382} = 0.9584$$

En consecuencia:

$$q_{b_{1,2}} = 0.9584 \times (-4.97) = -4.76\ N/mm$$
$$q_{b_{2,3}} = 0.9584 \times 0 = 0\ N/mm$$
$$q_{b_{3,4}} = 0.9584 \times 3.41 = 3.27\ N/mm$$
$$q_{b_{4,5}} = 0.9584 \times 6.44 = 6.17\ N/mm$$
$$q_{b_{5,6}} = 0.9584 \times 8.20 = 7.86\ N/mm$$
$$q_{b_{6,7}} = 0.9584 \times 10.29 = 9.86\ N/mm$$
$$q_{b_{7,8}} = 0.9584 \times 9.36 = 8.97\ N/mm$$
$$q_{b_{8,9}} = 0.9584 \times 5.83 = 5.59\ N/mm$$
$$q_{b_{9,10}} = 0.9584 \times 0.50 = 0.48\ N/mm$$
$$q_{b_{10,11}} = 0.9584 \times (-5.54) = -5.31\ N/mm$$
$$q_{b_{11,12}} = 0.9584 \times (-11.10) = -10.64\ N/mm$$
$$q_{b_{12,13}} = 0.9584 \times (-15.06) = -14.43\ N/mm$$
$$q_{b_{13,14}} = 0.9584 \times (-16.55) = -15.86\ N/mm$$
$$q_{b_{14,15}} = 0.9584 \times (-14.90) = -14.28\ N/mm$$
$$q_{b_{15,16}} = 0.9584 \times (-12.58) = -12.06\ N/mm$$
$$q_{b_{16,1}} = 0.9584 \times (-8.53) = -8.18\ N/mm$$

En consecuencia, el flujo en cada uno de los tramos de la sección será igual a los valores anteriores más un flujo incógnita q_I, que, en principio se supondrá que tiene el sentido contrario a las agujas del reloj. Para determinar el valor de q_I, se tomarán momentos de las cargas que actúan en el plano de la sección con respecto al centro geométrico de la misma (0,0). Según se dedujo anteriormente:

- Momento de las solicitaciones:

$$M_S = M_x = 20 \times 10^6 \ N \cdot mm$$

- Momento de las componentes según los ejes Y y Z de las cargas en los *booms*:

$$M_P = 0$$

- Momento de los flujos de cortadura que actúan en la sección:

$$M_q = 57304 \sum_n q_{b_n} + 916868 q_I = 57304 \times 43.32 + 916868 q_I$$

$$M_q = 2482409 + 916868 q_I$$

Estableciendo que:

$$M_S = M_P + M_q$$

queda:

$$20 \times 10^6 = 2482409 + 916868 q_I \Longrightarrow q_I = 19.11 \ N/mm$$

En consecuencia, los flujos totales en los distintos tramos son (ver figura 8.9):

$$\begin{array}{lllllllll}
q_{1,2} & = & q_{b_{1,2}} & - & q_I & = & -4.76 & - & 19.11 & = & -23.87 \ N/mm \\
q_{2,3} & = & q_{b_{2,3}} & - & q_I & = & 0.00 & - & 19.11 & = & -19.11 \ N/mm \\
q_{3,4} & = & q_{b_{3,4}} & - & q_I & = & 3.27 & - & 19.11 & = & -15.84 \ N/mm \\
q_{4,5} & = & q_{b_{4,5}} & - & q_I & = & 6.17 & - & 19.11 & = & -12.94 \ N/mm \\
q_{5,6} & = & q_{b_{5,6}} & - & q_I & = & 7.86 & - & 19.11 & = & -11.25 \ N/mm \\
q_{6,7} & = & q_{b_{6,7}} & - & q_I & = & 9.86 & - & 19.11 & = & -9.25 \ N/mm \\
q_{7,8} & = & q_{b_{7,8}} & - & q_I & = & 8.97 & - & 19.11 & = & -10.14 \ N/mm \\
q_{8,9} & = & q_{b_{8,9}} & - & q_I & = & 5.59 & - & 19.11 & = & -13.52 \ N/mm \\
q_{9,10} & = & q_{b_{9,10}} & - & q_I & = & 0.48 & - & 19.11 & = & -18.63 \ N/mm \\
q_{10,11} & = & q_{b_{10,11}} & - & q_I & = & -5.31 & - & 19.11 & = & -24.42 \ N/mm \\
q_{11,12} & = & q_{b_{11,12}} & - & q_I & = & -10.64 & - & 19.11 & = & -29.75 \ N/mm \\
q_{12,13} & = & q_{b_{12,13}} & - & q_I & = & -14.43 & - & 19.11 & = & -33.54 \ N/mm \\
q_{13,14} & = & q_{b_{13,14}} & - & q_I & = & -15.86 & - & 19.11 & = & -34.97 \ N/mm \\
q_{14,15} & = & q_{b_{14,15}} & - & q_I & = & -14.28 & - & 19.11 & = & -33.39 \ N/mm \\
q_{15,16} & = & q_{b_{15,16}} & - & q_I & = & -12.06 & - & 19.11 & = & -31.17 \ N/mm \\
q_{16,1} & = & q_{b_{16,1}} & - & q_I & = & -8.18 & - & 19.11 & = & -27.29 \ N/mm
\end{array}$$

Resultados muy parecidos a los obtenidos por el otro procedimiento.

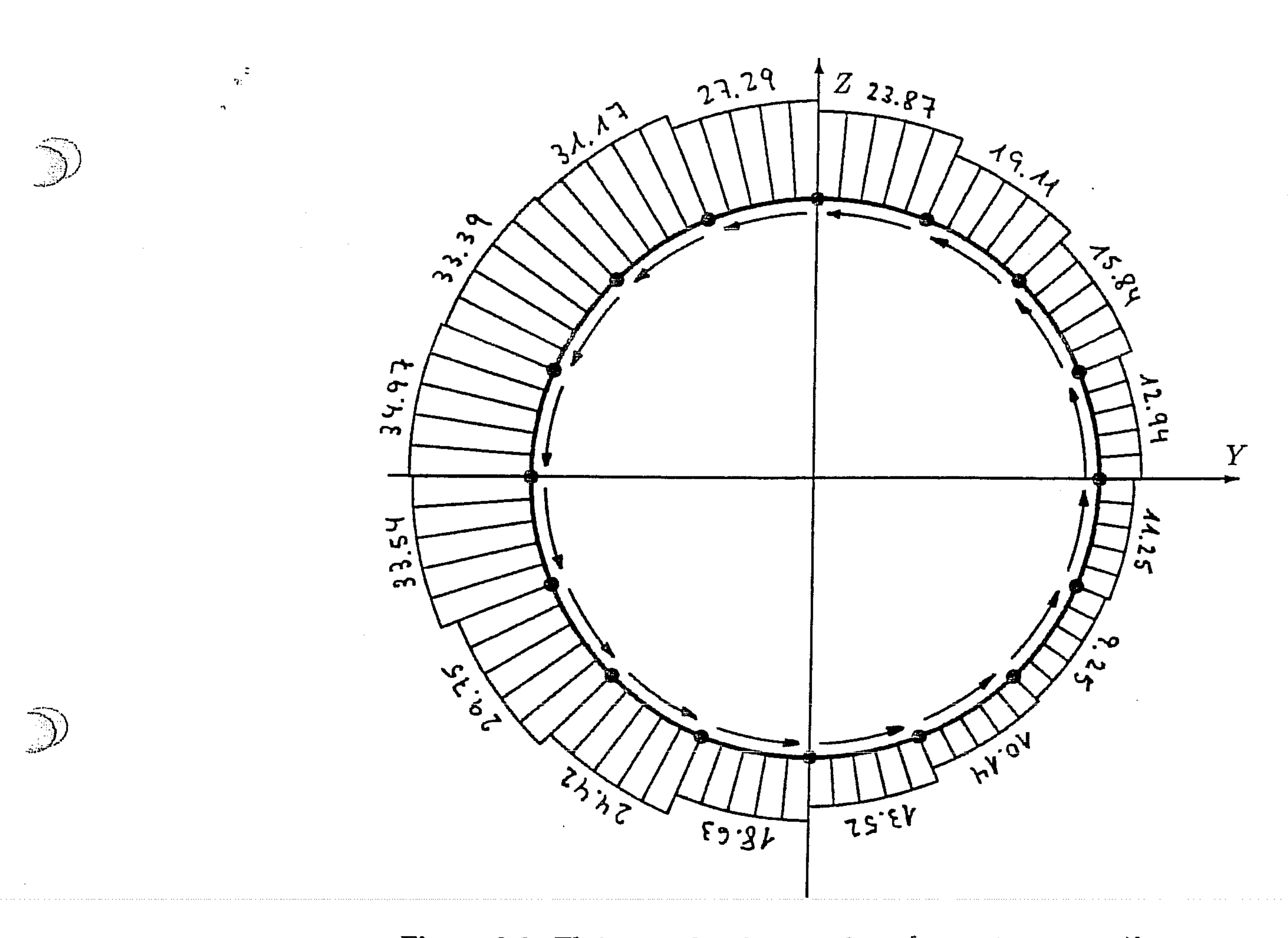


Figura 8.9: Flujos totales de cortadura [procedimiento b)]

Capítulo 9

Análisis de esfuerzos en costillas

Las costillas son elementos estructurales dispuestos en las secciones transversales de las alas que tienen las siguientes misiones:

1. Mantener la forma de la sección transversal del ala. Esto es de vital importancia a fín de que se mantenga la forma aerodinámica del perfil sustentador.

2. Disminuir la distancia entre apoyos de los larguerillos que refuerzan el revestimiento del ala. Así, se aumenta su esfuerzo de pandeo como columna, y se consiguen, en consecuencia, una mayor eficiencia de la sección ante cargas de compresión y de flexión.

3. Soportar las cargas concentradas que actúan en planos transversales y transmitirlas a los demás elementos de la estructura.

4. Redistribuir la cortadura en las zonas próximas a aberturas y discontinuidades.

9.1 Distribución de cargas concentradas

Como se ha indicado anteriormente, una de las principales funciones de las costillas es la de transmitir las cargas concentradas al resto de la estructura. Sin embargo, generalmente, las costillas suelen estar formadas por paneles delgados, de modo que, si se aplican sobre ellos directamente las cargas, se produciría el fallo de los mismos, no pudiendo, por consiguiente, transferir dicha carga al resto de la estructura. Por ello, es necesario reforzar las costillas con elementos que distribuyan las cargas concentradas entre los paneles de las mismas antes de ser transferidas al resto de la estructura. Si la carga está aplicada en el plano del alma de la costilla, los elementos de refuerzo deberían estar alineados con la dirección de la carga. Si esto no fuera posible, se deberían colocar dos elementos de refuerzo perpendiculares entre sí a fín de que cada uno soporte las componentes de la carga en esa dirección. Si las cargas no están aplicadas en el plano del alma, sería necesario disponer la estructura de modo que se cruzaran dos almas en el punto de aplicación de la carga, existiendo elementos de refuerzo en las tres direcciones en que se puede descomponer la carga (ver figura 9.1). En ocasiones no es posible hacer que dos almas se crucen en el punto de aplicación de la carga, de modo que existirá una componente de la carga perpendicular al plano del alma. Si esta componente es pequeña puede

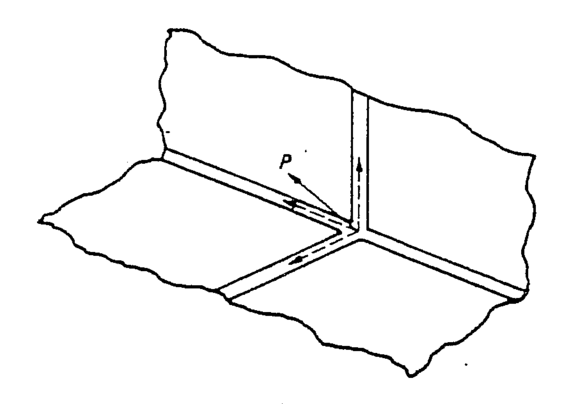


Figura 9.1: Disposición estructural para una carga fuera del plano

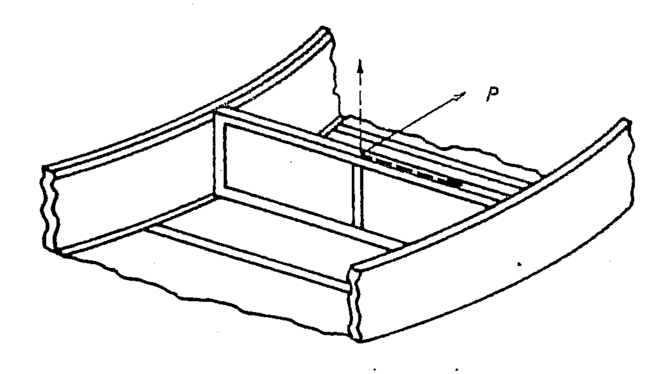


Figura 9.2: Soporte de una carga con una componente normal al alma

ser resistida por medio de un refuerzo situado en el plano del alma trabajando a flexión. Sin embargo, si es grande es mucho más conveniente situar un elemento longitudinal entre costillas para soportar dicha componente (ver figura 9.2). Como norma general, siempre hay que evitar que actúe sobre un alma sin reforzar una carga perpendicular a su plano.

9.1.1 Ejemplo

En la figura 9.3 se muestra una viga en voladizo sobre la que actúan las cargas concentradas que se indican. Se trata de conocer la distribución de las cargas en los elementos de refuerzo, así como los flujos cortantes en los paneles del alma.

<u>**Solución**</u>

Se supondrá que los momentos flectores son soportados enteramente por las alas, de modo que los paneles del alma son efectivos sólo a cortadura. De acuerdo con esta hipótesis, el flujo de cortadura es constante en cada panel del alma. En la figura



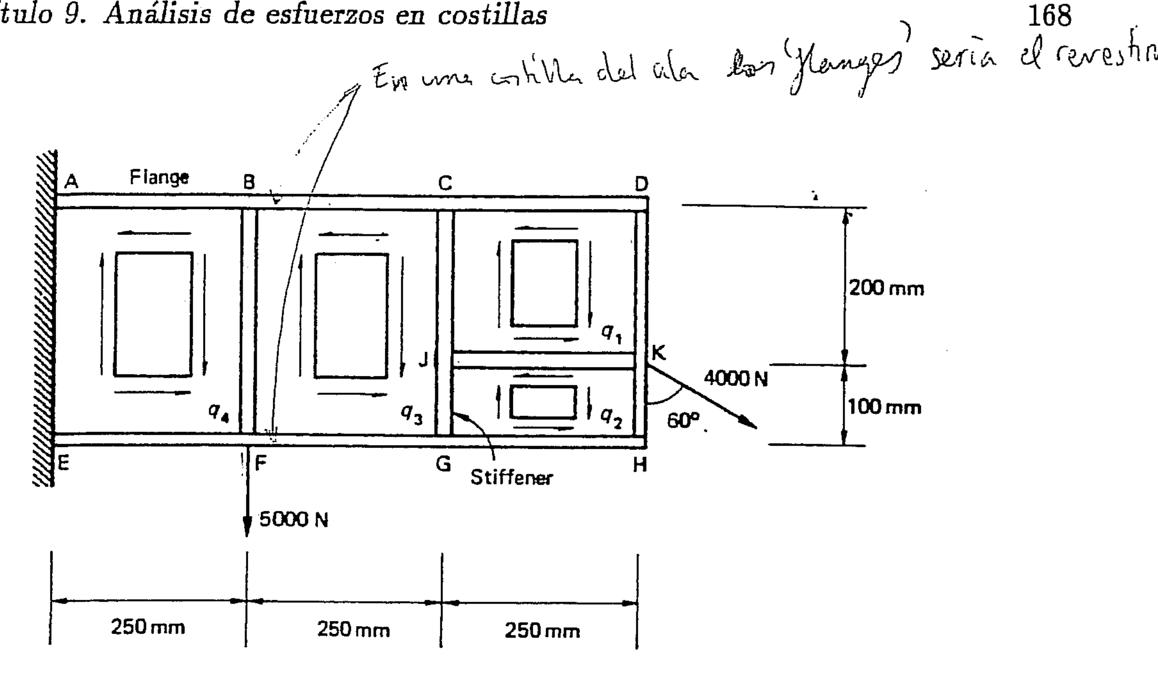


Figura 9.3: Viga en voladizo del ejemplo

se indican las direcciones que se asumen en principio para dichos flujos.

En el punto de aplicación de la carga de 4000 N se colocarán los refuerzos HKD y JK perpendiculares entre sí, para resistir las componentes horizontal y vertical de la carga. Para evitar las concentraciones de esfuerzos que se producirían en el panel si se dejara libre el extremo J del refuerzo JK, se colocará otro refuerzo, el GJC, al que se une el JK. De igual manera, se colocará el refuerzo FB para soportar la carga de 5000 N.

Antes de pasar al cálculo de esfuerzos, es necesario tener claro cuál será el "camino de las cargas" desde sus puntos de aplicación respectivos hasta la sección de empotramiento. Así, por ejemplo, se considerará la carga aplicada en K. Esta carga se puede descomponer en sus componentes horizontal y vertical. Dado que la rigidez a tracción/compresión de los elementos de refuerzo es mucho mayor que la rigidez a flexión, se puede suponer que la componente horizontal de la carga está siendo soportada enteramente por el elemento JK trabajando a tracción, mientras que el elemento HKD a flexión no soporta nada de la carga. Igualmente, la componente vertical será soportada por el elemento HKD trabajando a tracción. Estas cargas axiales inducidas en los refuerzos son equilibradas por los flujos de cortadura q_1 y q_2 existentes en los paneles $CDKJ$ y $JKHG$, los cuales serán equilibrados a su vez por las cargas axiales en las alas CD y GH y en el refuerzo GJC. Esta última se equilibra con el flujo de cortadura q_3 en el panel $GCBF$, y así sucesivamente hasta llegar a la sección de empotramiento. Como se ha podido ver, la carga concentrada da lugar a cargas axiales en las alas y elementos de refuerzo y a flujos de cortadura en los paneles del alma, siendo transmitida posteriormente a la estructura en que está empotrada la viga.

Una vez analizado el proceso, a continuación se determinarán los valores de estas cargas.

En la figura 9.4 se muestran los diagramas de cargas que actúan en los elementos JK y HKD. Planteando el equilibrio en el elemento JK:

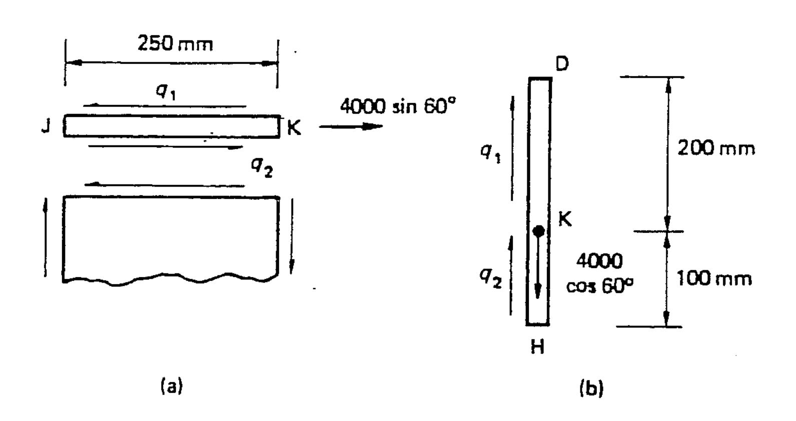


Figura 9.4: Diagrama de equilibrio de los refuerzos JK y HKD

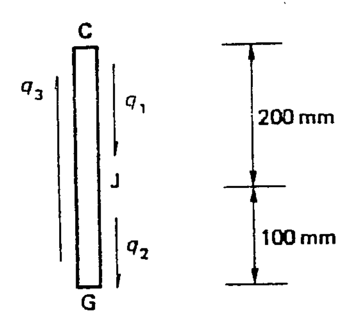


Figura 9.5: Diagrama de equilibrio del refuerzo GJC

$$(q_1 - q_2) \times 250 = 4000 \times \sin 60^\circ = 3464.1$$

y en el elemento HKD:

$$200q_1 + 100q_2 = 4000 \times \cos 60^\circ = 2000$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones queda:

$$q_1 = 11.3\ N/mm \qquad q_2 = -2.6\ N/mm$$

Considerando ahora el equilibrio del refuerzo GJC (ver figura 9.5):

$$300q_3 = 200q_1 + 100q_2 = 200 \times 11.3 + 100 \times (-2.6) = 2000$$

$$q_3 = 6.7\ N/mm$$

El flujo de cortadura q_4 en el panel $ABFE$ puede obtenerse aplicando cualquiera de los dos procedimientos siguientes:

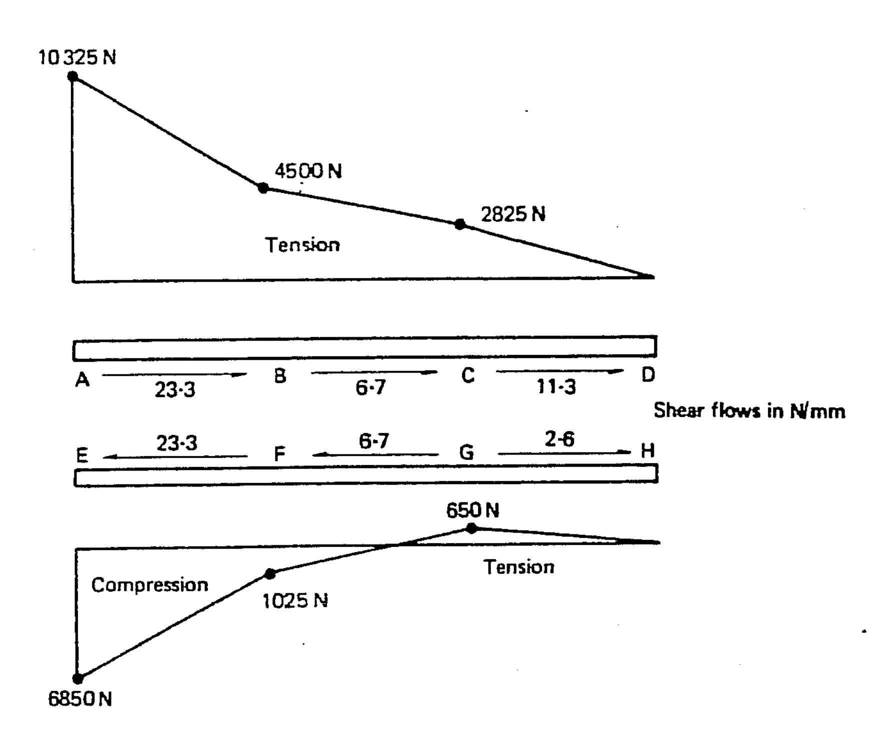


Figura 9.6: Distribución de cargas en las alas

- Si se plantea el equilibrio del elemento BF:

$$300q_4 = 300q_3 + 5000 = 7000 \Longrightarrow q_4 = 23.3 \ N/mm$$

- Si se considera la componente vertical de la fuerza cortante:

$$300q_4 = 4000 \cos 60^\circ + 5000 = 7000 \Longrightarrow q_4 = 23.3 \ N/mm$$

En cuanto a la distribución de las cargas axiales en las alas, se calcularán a partir de la suma algebráica de los flujos de cortadura a lo largo de sus longitudes:

$$P_D = 0$$

$$P_C = 250q_1 = 2825 \ N$$

$$P_B = 250q_1 + 250q_3 = 4500 \ N$$

$$P_A = 250q_1 + 250q_3 + 250q_4 = 10325 \ N$$

$$P_H = 0$$

$$P_G = -250q_2 = 650 \ N$$

$$P_F = -250q_2 - 250q_3 = -1025 \ N$$

$$P_E = -250q_2 - 250q_3 - 250q_4 = -6850 \ N$$

en donde las cargas positivas son tracciones y las negativas compresiones. En la figura 9.6 se representa la distribución de cargas en las alas de la viga.

La distribución de las cargas en las alas de la viga entre los puntos A y C o E y G se podrían haber obtenido considerando las cargas axiales y momentos flectores

existentes en cada sección de la viga. Así, por ejemplo, en la sección AE existe un momento flector de valor:

$$MF_{AE} = -5000 \times 250 - 2000 \times 750 + 3464.1 \times 50 = -2576800 \ N \cdot mm$$

y una carga axial de valor:

$$P_{AE} = 3464.1 \ N$$

Por tanto:

$$P_A = \frac{P_{AE}}{2} - \frac{MF_{AE}}{300} = 10321 \ N$$

$$P_E = \frac{P_{AE}}{2} + \frac{MF_{AE}}{300} = -6857 \ N$$

Este procedimiento no puede ser usado entre los puntos C y D o G y H, ya que en esta zona existe una incógnita más, que es la carga axial en el elemento JK.

La distribución de las cargas axiales en los elementos de refuerzo se obtendrán a partir de la suma algebráica de los flujos de cortadura a lo largo de sus longitudes y de las cargas aplicadas en ellos:

Elemento JK:

$$P_K = 4000 \sin 60^\circ = 3464.1 \ N$$
$$P_J = P_K - 250q_1 + 250q_2 = 0$$

Elemento BF:

$$P_F = 5000 \ N$$
$$P_B = P_F - 300q_4 + 300q_3 = 0$$

Elemento GJC:

$$P_G = 0$$
$$P_J = P_G - 100q_3 + 100q_2 = -920 \ N$$
$$P_C = P_J - 200q_3 + 200q_1 = 0$$

Elemento HKD:

$$P_H = 0$$
$$P_K = P_H - 100q_2 = -260 \ N$$
$$P'_K = P_K + 4000 \cos 60^\circ = 2260 \ N$$
$$P_D = P'_K - 200q_1 = 0$$

En la figura 9.7 se representan los diagramas de cargas en estos elementos.

Si se produce el pandeo de los paneles del alma, se desarrollará tensión diagonal, que inducirá otras cargas axiales en las alas y en los elementos de refuerzo, las cuales tendrían que sumarse a las calculadas anteriormente.

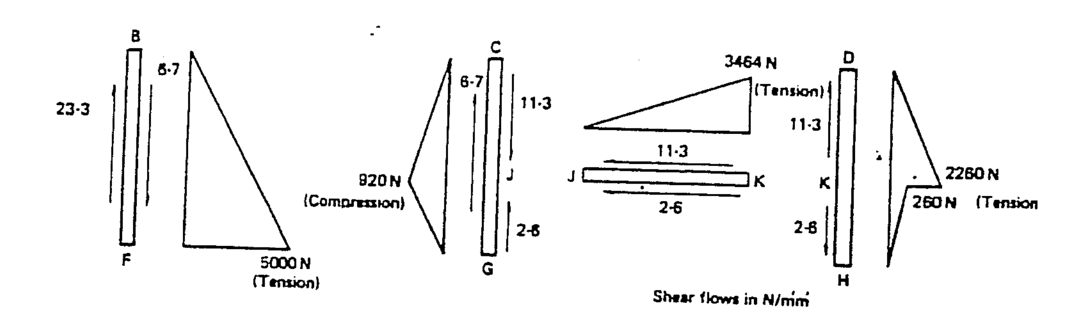


Figura 9.7: Distribución de cargas en los refuerzos

9.2 Cálculo de esfuerzos en las costillas

Las costillas transfieren las cargas concentradas que actúan sobre ellas al resto de la estructura por medio de un flujo de cortadura. En consecuencia, han de estar en equilibrio bajo la acción de las cargas exteriores y del flujo de cortadura reacción que el revestimiento ejerce sobre ellas.

Sea una costilla de un ala cuyo revestimiento ha sido idealizado de modo que los paneles del mismo son efectivos sólo a cortadura. Sobre la costilla actúan una serie de cargas concentradas, las cuales tienen unas resultantes en un punto dado de valor S_{x_c}, S_{z_c} y M_{y_c}. Sean las fuerzas cortantes y el momento torsor en una sección del ala inmediatamente anterior a la costilla S_{x_1}, S_{z_1} y M_{y_1}, y en una inmediatamente posterior S_{x_2}, S_{z_2} y M_{y_2}. Teniendo en cuenta el convenio de signos de las solicitaciones adoptado para el ala (ver Apartado 7.3 del Capítulo 7) y considerando positivas las cargas dirigidas según los sentidos positivos de los ejes X y Z, se cumplirá evidentemente que:

$$S_{x_1} = S_{x_2} + S_{x_c}$$

$$S_{z_1} = S_{z_2} + S_{z_c}$$

$$M_{y_1} = M_{y_2} + M_{y_c}$$

Las fuerzas cortantes y los momentos torsores existentes en las secciones anterior y posterior a la costilla generarán unas distribuciones de flujos de cortadura en los paneles de revestimiento de las mismas de valores q_1 y q_2, respectivamente, las cuales pueden ser obtenidas mediante los procedimientos descritos en el Capítulo 7. Nótese que estos son flujos de cortadura que ejerce la parte frontal sobre la parte dorsal del ala; por consiguiente, los flujos que ejercen las secciones del ala anterior y posterior sobre la sección en que está la costilla serán $-q_1$ y q_2, respectivamente. Estos flujos se han de equilibrar con el que ejerce la costilla sobre el revestimiento, de modo que (ver figura 9.8):

$$q_c + q_2 - q_1 = 0$$

$$q_c = q_1 - q_2$$

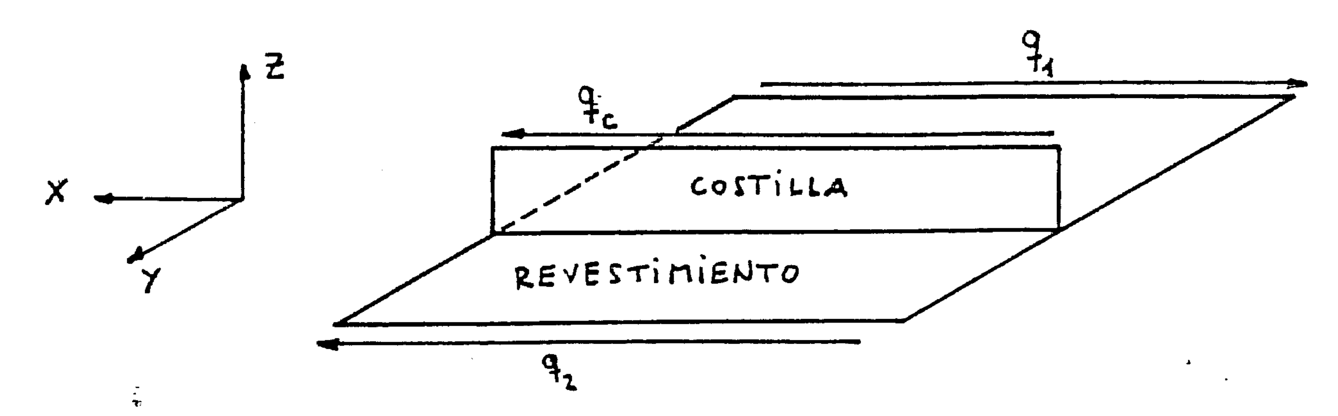


Figura 9.8: Diagrama de equilibrio de la unión costilla-revestimiento

El flujo reacción que ejerce el revestimiento sobre la costilla será $-q_c$.
Sustituyendo q_1 y q_2 por sus expresiones, dadas en el Apartado 7.5 del Capítulo 7:

$$q_1 = q_{o_1} - (k_3 S_{x_1} - k_1 S_{z_1}) \sum_r A_{b_r}(X_r - X_g) - (k_2 S_{z_1} - k_1 S_{x_1}) \sum_r A_{b_r}(Z_r - Z_g)$$

$$q_2 = q_{o_2} - (k_3 S_{x_2} - k_1 S_{z_2}) \sum_r A_{b_r}(X_r - X_g) - (k_2 S_{z_2} - k_1 S_{x_2}) \sum_r A_{b_r}(Z_r - Z_g)$$

queda:

$$q_c = q_1 - q_2 = q_{o_c} - (k_3 S_{x_c} - k_1 S_{z_c}) \sum_r A_{b_r}(X_r - X_g) - (k_2 S_{z_c} - k_1 S_{x_c}) \sum_r A_{b_r}(Z_r - Z_g)$$

Es decir, el flujo que ejerce la costilla sobre el revestimiento se obtiene analizando la sección de revestimiento en donde está situada la costilla por los procedimientos indicados en el Apartado 7.5 del Capítulo 7, considerando que dicha sección está sometida a unas fuerzas cortantes iguales a las resultantes de las cargas exteriores que actúan sobre la costilla. El flujo reacción que ejerce el revestimiento sobre la costilla será igual al anterior pero de signo contrario.

Una vez determinado el flujo cortante en el perímetro de la costilla, se podrán calcular las fuerzas cortantes y los momentos flectores en cualquier sección de la costilla, la cual estará en equilibrio bajo la acción del flujo y de las cargas exteriores.

9.2.1 Ejemplo

En la figura 9.9 se representa una costilla sometida a las cargas indicadas en ella. Todos los paneles son de 1 mm de espesor. Se desean determinar las cargas axiales en las alas y los flujos de cortadura en los paneles del alma de la costilla.

Solución

En primer lugar será necesario calcular el flujo de cortadura reacción que el revestimiento ejerce sobre la costilla. Para ello, se ha idealizado la sección del

revestimiento por los procedimientos indicados en el Capítulo 7 y se han obtenido las propiedades de los *booms* indicadas en la tabla 9.1, en la que también se incluyen sus posiciones referidas a los ejes indicados en la figura 9.9.

Boom	cA_b	X	Z
1	150	−300	150
2	120	0	160
3	120	300	150
4	350	300	−150
5	350	0	−160
6	310	−300	−150

Tabla 9.1: Propiedades de la sección efectiva del revestimiento

De acuerdo con los datos de la tabla 9.1, las propiedades de la sección efectiva del revestimiento son:

$$Area = 1400 \; mm^2$$

$$X_g = 2.143 \; mm \qquad Z_g = -68.071 \; mm$$

$$I_{xx} = 2.6470 \times 10^7 \; mm^4$$

$$I_{zz} = 8.3694 \times 10^7 \; mm^4$$

$$I_{xz} = -0.2946 \times 10^7 \; mm^4$$

$$k_1 = \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} = -0.1335 \times 10^{-8}$$

$$k_2 = \frac{I_{zz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} = 3.7927 \times 10^{-8}$$

$$k_3 = \frac{I_{xx}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} = 1.1995 \times 10^{-8}$$

Para calcular los flujos de cortadura se supondrá en principio que la sección está abierta por los paneles de revestimiento 1-2, 2-3 y 3-4. De acuerdo con ésto, los flujos en los tramos se obtienen mediante la expresión:

$$q_{b_{r,r+1}} = q_{b_{r-1,r}} - [(k_3 S_x - k_1 S_z)(X_r - X_g) + (k_2 S_z - k_1 S_x)(Z_r - Z_g)]cA_{b_r}$$

que sustituyendo las variables por sus valores da:

$$q_{b_{r,r+1}} = q_{b_{r-1,r}} - [1.63968 \times 10^{-4}(X_r - 2.143) - 5.84931 \times 10^{-4}(Z_r + 68.071)]cA_{b_r}$$

Por consiguiente, los flujos en los distintos tramos valen:

$$q_{b_{1,2}} = 0$$

$$q_{b_{2,3}} = 0$$

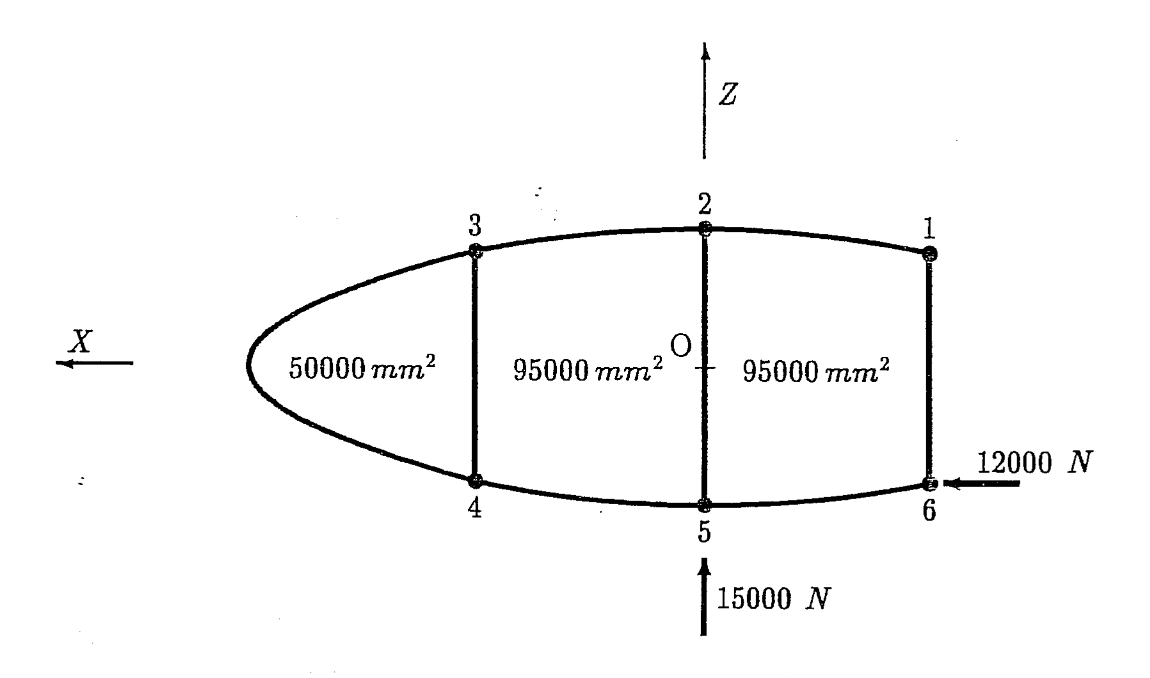


Figura 9.9: Costilla del ejemplo

$$q'_{b_{3,4}} = 0$$

$$q_{b_{3,4}} = q_{b_{2,3}} - q'_{b_{3,4}} - [1.63968\,(X_3 - 2.143) - 5.84931\,(Z_3 + 68.071)] \times 10^{-4} c A_{b_3} = -21.17$$

$$q_{b_{4,5}} = q_{b_{3,4}} + q'_{b_{3,4}} - [1.63968\,(X_4 - 2.143) - 5.84931\,(Z_4 + 68.071)] \times 10^{-4} c A_{b_4} = -21.49$$

$$q_{b_{2,5}} = q_{b_{1,2}} - q_{b_{2,3}} - [1.63968\,(X_2 - 2.143) - 5.84931\,(Z_2 + 68.071)] \times 10^{-4} c A_{b_2} = -15.97$$

$$q_{b_{1,6}} = -q_{b_{1,2}} - [1.63968\,(X_1 - 2.143) - 5.84931\,(Z_1 + 68.071)] \times 10^{-4} c A_{b_1} = -11.70$$

$$q_{b_{6,5}} = q_{b_{1,6}} - [1.63968\,(X_6 - 2.143) - 5.84931\,(Z_6 + 68.071)] \times 10^{-4} c A_{b_6} = 18.51$$

En la figura 9.10 se representan estos flujos. Nótese que las resultantes de los flujos en direcciones X y Z son aproximadamente iguales a las fuerzas cortantes soportadas por el revestimiento.

Los flujos totales se determinarán sumando a los calculados anteriormente los flujos incógnita en cada celda, q_I, q_{II} y q_{III}. Si se supone que los tres flujos incógnita tienen sentido contrario al de las agujas del reloj, el flujo total en cada uno de los tramos de la sección será igual a:

$$\begin{aligned}
q_{1,2} &= q_{III} \\
q_{2,3} &= q_{II} \\
q'_{3,4} &= q_I \\
q_{3,4} &= q_{b_{3,4}} - q_I + q_{II} \\
q_{2,5} &= q_{b_{2,5}} - q_{II} + q_{III} \\
q_{1,6} &= q_{b_{1,6}} - q_{III} \\
q_{4,5} &= q_{b_{4,5}} + q_{II} \\
q_{5,6} &= q_{b_{5,6}} + q_{III}
\end{aligned}$$

Para determinar el valor de q_I, q_{II} y q_{III}, se plantearán las tres ecuaciones siguientes:

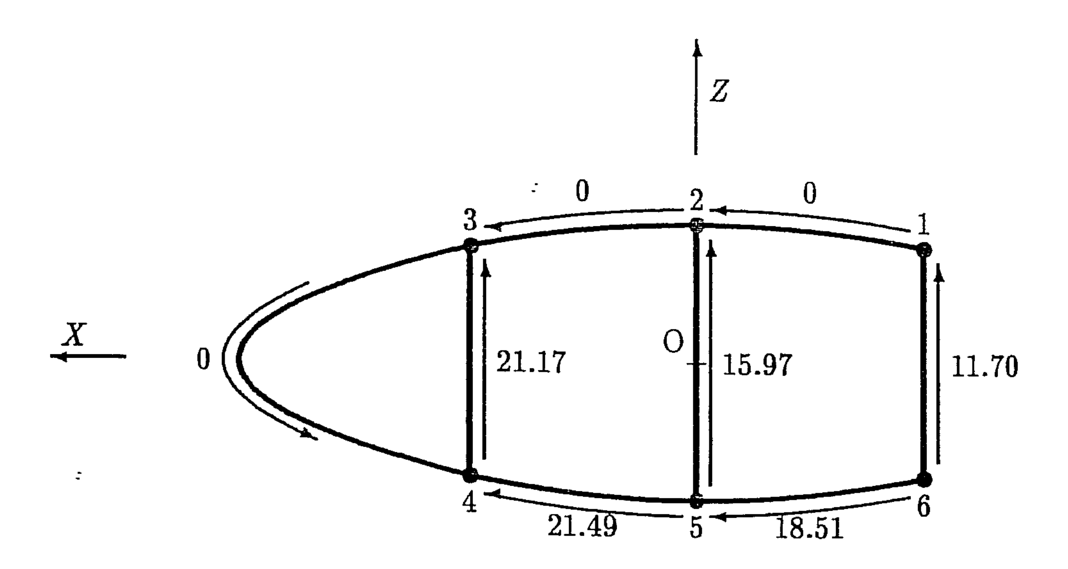


Figura 9.10: Flujos de cortadura considerando la sección abierta

- El momento resultante con respecto a cualquier punto de los flujos de cortadura ha de ser igual al momento de las fuerzas aplicadas:

$$M_S = M_P + M_q$$

Tomando momentos con respecto al punto $O(0,0)$ y considerando que son positivos si tienen sentido contrario al de las agujas del reloj:

– Momento de las fuerzas aplicadas:

$$M_S = -12000 \times 150 = -1.8 \times 10^6$$

– Momento de los flujos de cortadura que actúan en la sección (ver Apartado 7.5 del Capítulo 7):

$$M_q = 2\sum_n A_n q_{b_n} + 2A_I q_I + 2A_{II} q_{II} + 2A_{III} q_{III}$$

Siendo:

$$A_{3,4} = A_{1,6} = \frac{300 \times 300}{2} = 45000\ mm^2$$

$$A_{1,2} = A_{2,3} = A_{4,5} = A_{5,6} = \frac{95000 - 45000}{2} = 25000\ mm^2$$

$$A'_{3,4} = 50000 + A_{3,4} = 95000\ mm^2$$

y el área de cada celda:

$$A_I = 50000\ mm^2$$

$$A_{II} = 95000\ mm^2$$
$$A_{III} = 95000\ mm^2$$

Por tanto, teniendo en cuenta las direcciones de los flujos q_b, queda:

$$M_q = -2852300 + 100000 q_I + 190000 q_{II} + 190000 q_{II}$$

Por consiguiente, la primera ecuación es:

$$-1.8 \times 10^6 = -2852300 + 100000 q_I + 190000 q_{II} + 190000 q_{III}$$

que, simplificando, queda:

$$q_I + 1.9 q_{II} + 1.9 q_{III} = 10.523$$

- Las otras dos ecuaciones se obtienen de plantear que son iguales los giros por unidad de longitud de las tres celdas:

$$\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_I = \left(\frac{d\theta}{dy}\right)_{II} = \left(\frac{d\theta}{dy}\right)_{III}$$

Considerando positivos los giros contrarios a las agujas del reloj, queda para la celda I:

$$\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_I = \frac{1}{2A_I G}\left(q_I \delta_I - q_{II}\delta_{II,I} + \sum_I \frac{q_{b_n} L_n}{t_n}\right)$$

siendo:

$$\delta_I = \frac{L'_{3,4}}{t'_{3,4}} + \frac{L_{3,4}}{t_{3,4}} = \frac{700}{1} + \frac{300}{1} = 1000$$

$$\delta_{II,I} = \frac{L_{3,4}}{t_{3,4}} = \frac{300}{1} = 300$$

$$\sum_I \frac{q_{b_n} L_n}{t_n} = \frac{q'_{b_{3,4}} L'_{3,4}}{t'_{3,4}} - \frac{q_{b_{3,4}} L_{3,4}}{t_{3,4}} = 6351$$

Por consiguiente:

$$\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_I = \frac{1}{2 \times 50000 \times G}(1000 q_I - 300 q_{II} + 6351)$$

De forma similar, se obtiene para la celda II:

$$\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_{II} = \frac{1}{2A_{II}G}\left(-q_I\delta_{I,II} + q_{II}\delta_{II} - q_{III}\delta_{III,II} + \sum_{II}\frac{q_{b_n}L_n}{t_n}\right)$$

siendo:

$$\delta_{I,II} = \delta_{II,I} = 300$$

$$\delta_{II} = \frac{L_{2,3}}{t_{2,3}} + \frac{L_{3,4}}{t_{3,4}} + \frac{L_{4,5}}{t_{4,5}} + \frac{L_{2,5}}{t_{2,5}} = \frac{300}{1} + \frac{300}{1} + \frac{300}{1} + \frac{300}{1} = 1200$$

$$\delta_{III,II} = \frac{L_{2,5}}{t_{2,5}} = \frac{300}{1} = 300$$

$$\sum_{II}\frac{q_{b_n}L_n}{t_n} = \frac{q_{b_{2,3}}L_{2,3}}{t_{2,3}} + \frac{q_{b_{3,4}}L_{3,4}}{t_{3,4}} + \frac{q_{b_{4,5}}L_{4,5}}{t_{4,5}} - \frac{q_{b_{2,5}}L_{2,5}}{t_{2,5}} = -8007$$

Por consiguiente:

$$\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_{II} = \frac{1}{2 \times 95000 \times G}(-300q_I + 1200q_{II} - 300q_{III} - 8007)$$

Y para la celda III:

$$\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_{III} = \frac{1}{2A_{III}G}\left(-q_{II}\delta_{II,III} + q_{III}\delta_{III} + \sum_{III}\frac{q_{b_n}L_n}{t_n}\right)$$

siendo:

$$\delta_{II,III} = \delta_{III,II} = 300$$

$$\delta_{III} = \frac{L_{1,2}}{t_{1,2}} + \frac{L_{2,5}}{t_{2,5}} + \frac{L_{5,6}}{t_{5,6}} + \frac{L_{1,6}}{t_{1,6}} = \frac{300}{1} + \frac{300}{1} + \frac{300}{1} + \frac{300}{1} = 1200$$

$$\sum_{III}\frac{q_{b_n}L_n}{t_n} = \frac{q_{b_{1,2}}L_{1,2}}{t_{1,2}} + \frac{q_{b_{2,5}}L_{2,5}}{t_{2,5}} + \frac{q_{b_{5,6}}L_{5,6}}{t_{5,6}} - \frac{q_{b_{1,6}}L_{1,6}}{t_{1,6}} = -6834$$

Por consiguiente:

$$\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_{III} = \frac{1}{2 \times 95000 \times G}(-300q_{II} + 1200q_{III} - 6834)$$

Expresando que:

$$\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_I = \left(\frac{d\theta}{dy}\right)_{II}$$

$$\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_I = \left(\frac{d\theta}{dy}\right)_{III}$$

Queda:

$$22q_I - 17.7q_{II} + 3q_{III} = -200.74$$
$$19q_I - 2.7q_{II} - 12q_{III} = -189.01$$

Resolviendo el sistema obtenido queda:

$$q_I = -6.39$$
$$q_{II} = 4.20$$
$$q_{III} = 4.70$$

Por consiguiente los flujos totales en los distintos tramos serán (ver figura 9.11):

$$\begin{array}{lcllcr}
q_{1,2} & = & q_{b_{1,2}} & + & q_{III} & = & 4.70\ N/mm \\
q_{2,3} & = & q_{b_{2,3}} & + & q_{II} & = & 4.20\ N/mm \\
q'_{3,4} & = & q'_{b_{3,4}} & + & q_I & = & -6.39\ N/mm \\
q_{4,5} & = & q_{b_{4,5}} & + & q_{II} & = & -17.29\ N/mm \\
q_{5,6} & = & q_{b_{5,6}} & + & q_{III} & = & -13.81\ N/mm \\
q_{1,6} & = & q_{b_{1,6}} & - & q_{III} & = & -16.40\ N/mm \\
q_{3,4} & = & q_{b_{3,4}} & - & q_I + q_{II} & = & -10.58\ N/mm \\
q_{2,5} & = & q_{b_{2,5}} & - & q_{II} + q_{III} & = & -15.47\ N/mm
\end{array}$$

Estos son los flujos que ejerce la costilla sobre el revestimiento. Los flujos reacción que ejerce el revestimiento sobre la costilla son los opuestos. En consecuencia, la costilla está en equilibrio bajo la acción de las cargas mostradas en la figura 9.12.

A continuación se determinarán las cargas existentes en las alas y refuerzos, así como los flujos de cortadura en el alma de la costilla.

Para determinar las cargas en la sección anterior al larguero 3-4 se planteará el equilibrio de la porción de costilla mostrada en la figura 9.13.

- Tomando momentos con respecto al punto 4 e igualando a cero:

$$6.39 \times (2 \times 50000) - T \cos 15° \times 300 = 0 \Longrightarrow T = 2205\ N$$

- Planteando que la suma de las componentes según el eje X de las fuerzas es nula:

$$-T \cos 15° + C \cos 15° = 0 \Longrightarrow C = T = 2205\ N$$

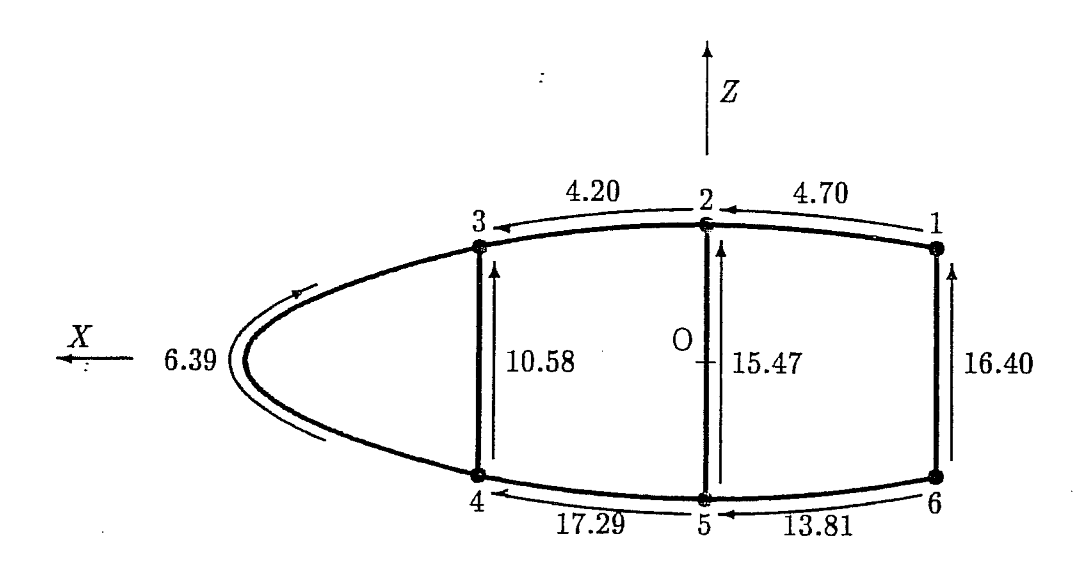


Figura 9.11: Flujos totales de cortadura sobre el revestimiento

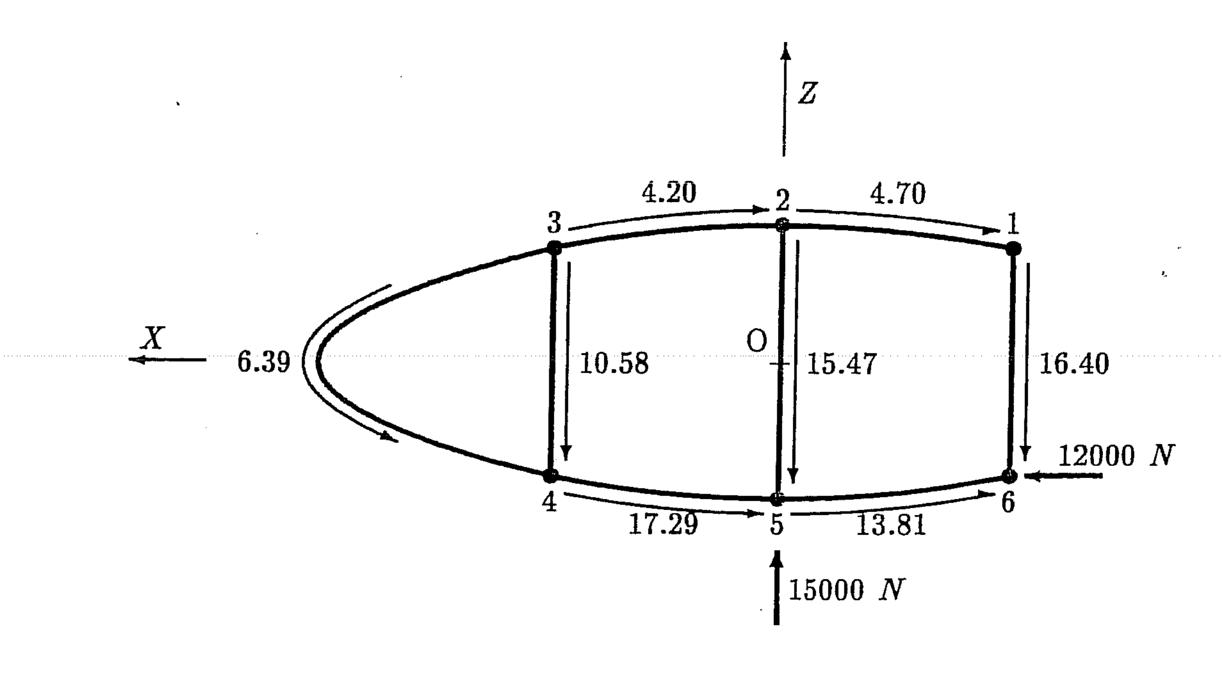


Figura 9.12: Cargas sobre la costilla

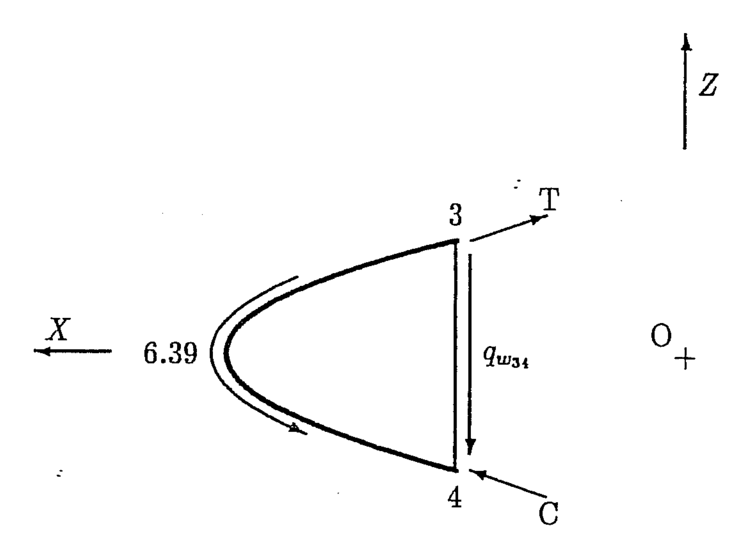


Figura 9.13: Diagrama de equilibrio de la celda I

- Planteando que la suma de las componentes según el eje Z de las fuerzas es nula:

$$-6.39 \times 300 + T \sin 15^\circ + C \sin 15^\circ - q_{w_{3,4}} \times 300 = 0 \Longrightarrow q_{w_{3,4}} = -2.59\ N/mm$$

Para determinar las cargas en la sección posterior al larguero 3-4 se planteará el equilibrio de la porción de costilla mostrada en la figura 9.14.

- $\sum M_o = 0$:

$$(-4.20 - 4.70 + 17.29 + 13.81) \times 2 \times 25000 - 16.40 \times 2 \times 45000 - 12000 \times 150 + \\ + q'_{w_{3,4}} \times 2 \times 45000 + (T' + C') \cos 15^\circ \times 150 + (T' + C') \sin 15^\circ \times 300 = 0$$

$$600 q'_{w_{3,4}} + (T' + C')(\cos 15^\circ + 2 \sin 15^\circ) = 14440$$

- $\sum F_x = 0$:

$$(-4.20 - 4.70 - 17.29 - 13.81) \times 300 + 12000 + (T' - C') \cos 15^\circ = 0$$
$$T' = C'$$

- $\sum F_z = 0$:

$$(4.20 - 4.70 - 17.29 + 13.81) \times 10 - 16.40 \times 300 - 15.47 \times 320 + 15000 - \\ - q'_{w_{3,4}} \times 300 - (T' + C') \sin 15^\circ = 0$$

$$300 q'_{w_{3,4}} + (T' + C') \sin 15^\circ = 5089.8$$

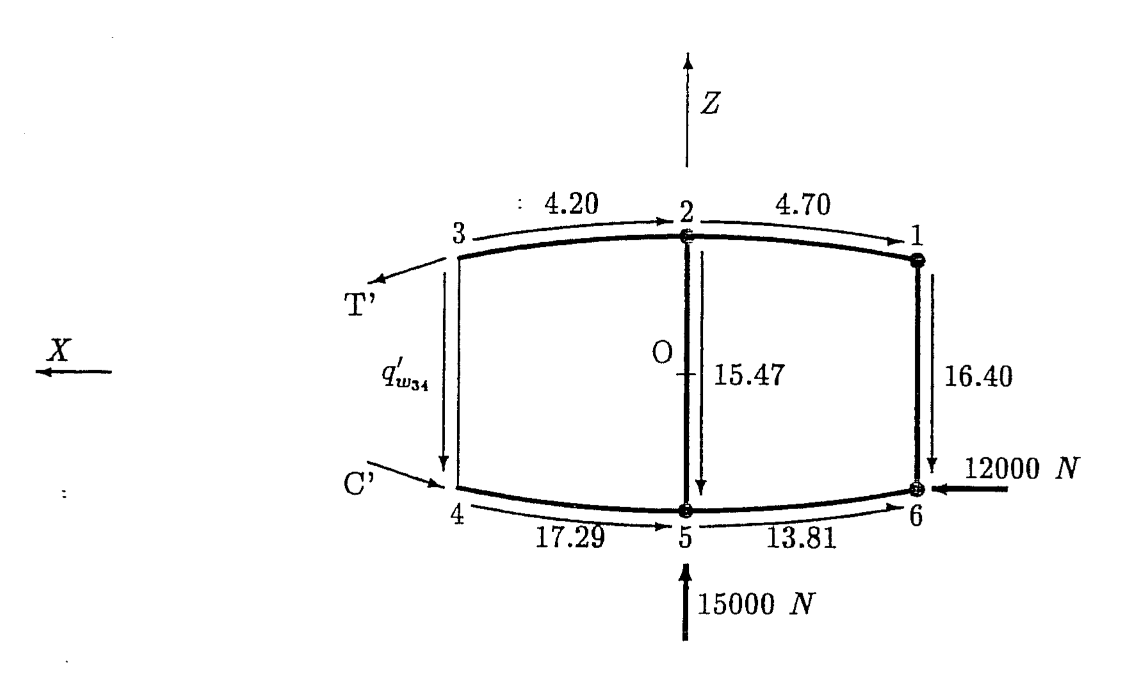


Figura 9.14: Diagrama de equilibrio de las celdas II y III

Resolviendo el sistema obtenido, queda:

$$T' = C' = 2205\ N$$

$$q'_{w_{3,4}} = 13.17\ N/mm$$

Como se puede comprobar, la suma de las fuerzas cortantes que ejercen las almas de la costilla sobre el larguero coincide con la fuerza cortante que en la figura 9.11 aparecía sobre la cara frontal del larguero:

$$-2.59 + 13.17 = 10.58\ N/mm$$

(dirigida del *boom* 4 al 3).

Para determinar las cargas en la sección a la izquierda del larguero 2-5 se planteará el equilibrio de la porción de costilla mostrada en la figura 9.15.

- $\sum F_z = 0$:

$$(-6.39 - 10.58) \times 300 + (4.20 - 17.29) \times 10 - q_{w_{2,5}} \times 320 = 0$$

$$q_{w_{2,5}} = -16.32\ N/mm$$

- $\sum F_x = 0$:

$$(-4.20 - 17.29) \times 300 + T - C = 0 \Longrightarrow T - C = 6447$$

- $\sum M_o = 0$:

$$6.39 \times 190000 - 4.20 \times 50000 + 17.29 \times 50000 + 10.58 \times 90000 + (-T - C) \times 160 = 0$$

$$T + C = 17630$$

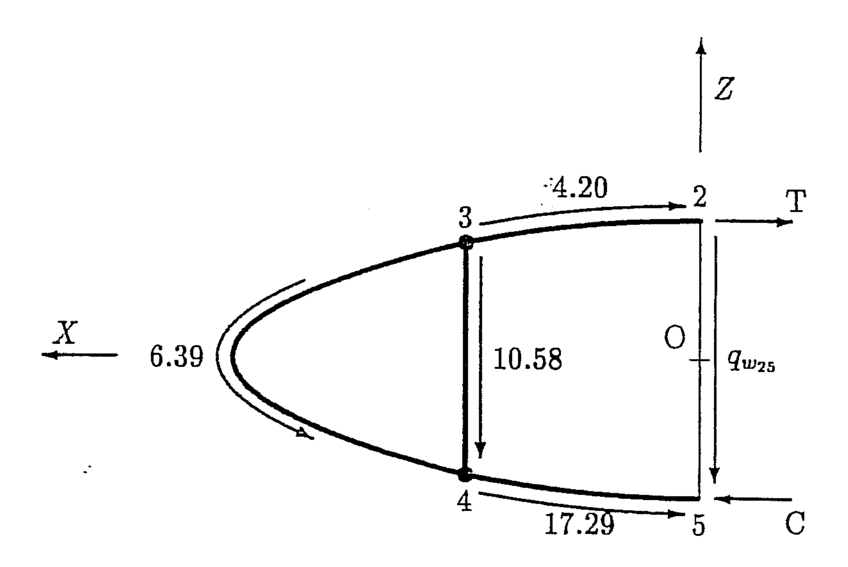


Figura 9.15: Diagrama de equilibrio de las celdas I y II

$$T = 12038\ N$$

$$C = 5591\ N$$

Para determinar las cargas en la sección a la derecha del larguero 2-5 se planteará el equilibrio de la porción de costilla mostrada en la figura 9.16.

- $\sum F_z = 0$:

$$-16.40 \times 300 + (-4.70 + 13.81) \times 10 - q'_{w_{2,5}} \times 320 = 0$$

$$q'_{w_{2,5}} = -15.09\ N/mm$$

- $\sum F_x = 0$:

$$(-4.70 - 13.81) \times 300 + 12000 - T' + C' = 0 \Longrightarrow T' - C' = 6447$$

- $\sum M_o = 0$:

$$-4.70 \times 50000 - 16.40 \times 90000 + 13.81 \times 50000 - 12000 \times 150 + (T' + C') \times 160 = 0$$

$$T' + C' = 17630$$

$$T' = 12038\ N$$

$$C' = 5591\ N$$

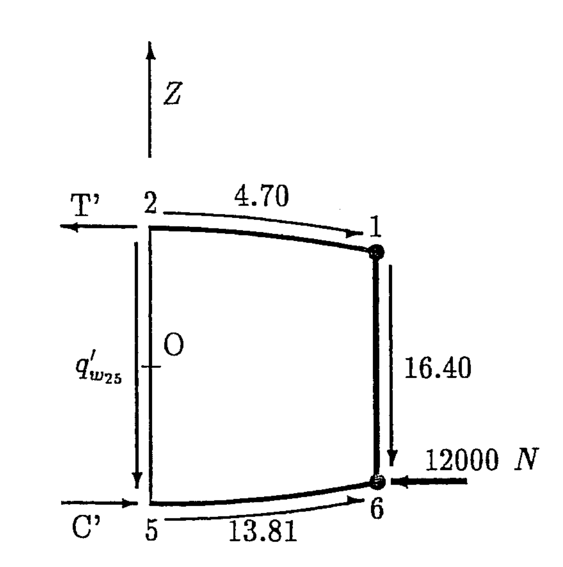


Figura 9.16: Diagrama de equilibrio de la celda III

Como se puede comprobar, la suma de las fuerzas cortantes que ejercen las almas de la costilla sobre el larguero más la carga aplicada coincide con la fuerza cortante que en la figura 9.11 aparecía sobre la cara frontal del larguero:

$$-16.32 - 15.09 + \frac{15000}{320} = 15.47 \ N/mm$$

(dirigida del *boom* 5 al 2).

Para determinar las cargas en la sección a la izquierda del larguero 1-6 se planteará el equilibrio de la porción de costilla mostrada en la figura 9.17.

- $\sum M_o = 0$:

$$6.39 \times 190000 + (-4.20 - 4.70 + 17.29 + 13.81) \times 50000 - 10.58 \times 90000 - q_{w_{1,6}} \times 90000 +$$
$$+(-T - C)\cos 15^\circ \times 150 + (-T - C)\sin 15^\circ \times 300 = 0$$

$$300 q_{w_{1,6}} + 0.5(\cos 15^\circ + 2\sin 15^\circ)((T + C) = 10920$$

- $\sum F_x = 0$:

$$(-4.70 - 4.20 - 17.29 - 13.81) \times 300 + (-T + C)\cos 15^\circ = 0$$
$$(-T + C)\cos 15^\circ = 12000$$

- $\sum F_z = 0$:

$$(-6.39 - 10.58 - q_{w_{1,6}}) \times 300 - 15.47 \times 320 + (-0.5 - 17.29 + 13.81) \times 10 +$$

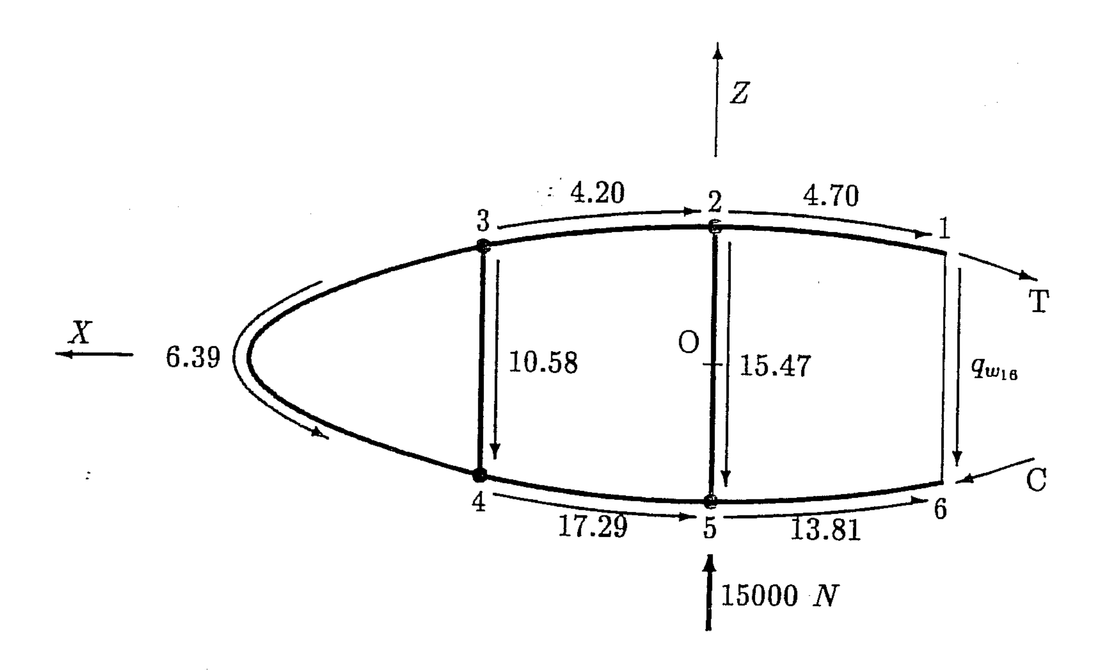


Figura 9.17: Diagrama de equilibrio de las celdas I, II y III

$$+(-T - C)\sin 15^\circ + 15000 = 0$$

$$300q_{w_{1,6}} + (T + C)\sin 15^\circ = 4920$$

Resolviendo el sistema, queda:

$$q_{w_{1,6}} = 5.68$$

$$T = 0$$

$$C = 12423$$

Como se puede comprobar, la suma de las fuerzas cortantes que ejercen las almas de la costilla sobre el larguero más la carga aplicada coincide con la fuerza cortante que en la figura 9.11 aparecía sobre la cara frontal del larguero:

$$5.68 + \frac{12423 \sin 15^\circ}{300} = 16.40\ N/mm$$

(dirigida del *boom* 6 al 1).

Capítulo 10

Análisis de esfuerzos en cuadernas

Las cuadernas son elementos estructurales dispuestos en las secciones transversales de los fuselajes que tienen misiones similares a las de las costillas en las alas, ésto es:

1. Mantener la forma de la sección transversal del fuselaje.
2. Disminuir la distancia entre apoyos de los larguerillos que refuerzan el revestimiento del fuselaje. Así, se aumenta su esfuerzo de pandeo como columna, y se consigue, en consecuencia, una mayor eficiencia de la sección ante cargas de compresión y de flexión.
3. Soportar las cargas concentradas que actúan en planos transversales y transmitirlas a los demás elementos de la estructura.
4. Redistribuir la cortadura en las zonas próximas a aberturas y discontinuidades.

10.1 Cálculo de esfuerzos en las cuadernas

Las cuadernas transfieren las cargas concentradas que actúan sobre ellas al resto de la estructura por medio de un flujo de cortadura. En consecuencia, han de estar en equilibrio bajo la acción de las cargas exteriores y del flujo de cortadura reacción que el revestimiento ejerce sobre ellas.

El flujo reacción que ejerce el revestimiento sobre la cuaderna se puede obtener de forma similar a como se dedujo en el Apartado 9.2 del Capítulo anterior. Es decir, se obtendrá en primer lugar el flujo cortante que ejerce la cuaderna sobre el revestimiento analizando la sección de revestimiento en la que está situada la cuaderna, sometida a las fuerzas cortantes y momentos torsores resultantes de las cargas que actúan sobre la cuaderna. Para ello se utilizarán los procedimientos descritos en el Apartado 8.5 del Capítulo 8. El flujo reacción que ejerce el revestimiento sobre la cuaderna es igual al obtenido, pero de sentido opuesto.

Una vez determinado el flujo cortante en el perímetro de la cuaderna, se podrán calcular las solicitaciones en cualquier sección de la misma, la cual estará en equilibrio bajo la acción del flujo y de las cargas exteriores.

Considerando que todas las cargas actúan en el plano de la cuaderna, ésta tiene, en general, tres incógnitas hiperestáticas, que son el momento flector, la fuerza axial

y la fuerza cortante en una sección cualquiera de la misma. Conocidos estos valores se pueden determinar las leyes de solicitaciones alrededor de toda la cuaderna.

10.1.1 Método del centro elástico

Existen muchos procedimientos para determinar los valores de las incógnitas hiperestáticas. Uno de ellos es el conocido como *Método del centro elástico*, que presenta la ventaja sobre otros de que da lugar a ecuaciones en las que las incógnitas hiperestáticas se pueden despejar directamente.

En la aplicación de este método se supone que:

(a) Las deformaciones debidas a las fuerzas axiales y de cortadura son nulas. En general, éstas son despreciables frente a las deformaciones debidas a los momentos flectores, por lo que el error cometido no es importante.

(b) Las secciones planas permanecen planas en la sección. Esto no es estrictamente cierto, ya que la curvatura de la cuaderna da lugar a que la distribución de deformaciones en cualquier sección no sea lineal.

(c) Los esfuerzos son proporcionales a las deformaciones. Esta hipótesis no se cumple en las cuadernas muy pesadas, en las que se pueden alcanzar esfuerzos por encima del límite proporcional del material.

A pesar de las limitaciones que presenta el método, permite resolver una gran cantidad de casos con unos cálculos no demasiado engorrosos.

A continuación se indica en qué consiste este procedimiento:

Sea una cuaderna de forma cualquiera, en equilibrio bajo la acción de unas cargas P_i cualesquiera y un flujo cortante en el perímetro q_i (ver figura 10.1). Como antes se ha indicado, se trata de una estructura hiperestática con tres incógnitas. Si se considera que la cuaderna está abierta por una sección cualquiera, las tres incógnitas hiperestáticas son el momento flector y las fuerzas axial y cortante, o en direcciones Y y Z, en esta sección. Si se conocieran los valores de estas tres incógnitas se podría obtener la ley de momentos flectores a lo largo de la cuaderna.

Así en una sección cualquiera, de coordenadas (y, z), el momento flector será:

$$M = M_s + M_A + Y_A z - Z_A y$$

en donde se supone que los momentos flectores son positivos si dan lugar a tracciones en las fibras internas de la cuaderna. M_s es el momento flector de las cargas P_i y los flujos q_i que actúan sobre la cuaderna, considerando que ésta está abierta por la sección A, es decir, que es una estructura isostática.

Para obtener los valores de las tres incógnitas hiperestáticas, se disponen de tres condiciones que se han de cumplir:

1. El giro de la sección A con respecto a la A' ha de ser nulo:

$$\theta = \int_{cuad} \frac{M\, m\, ds}{EI} = 0$$

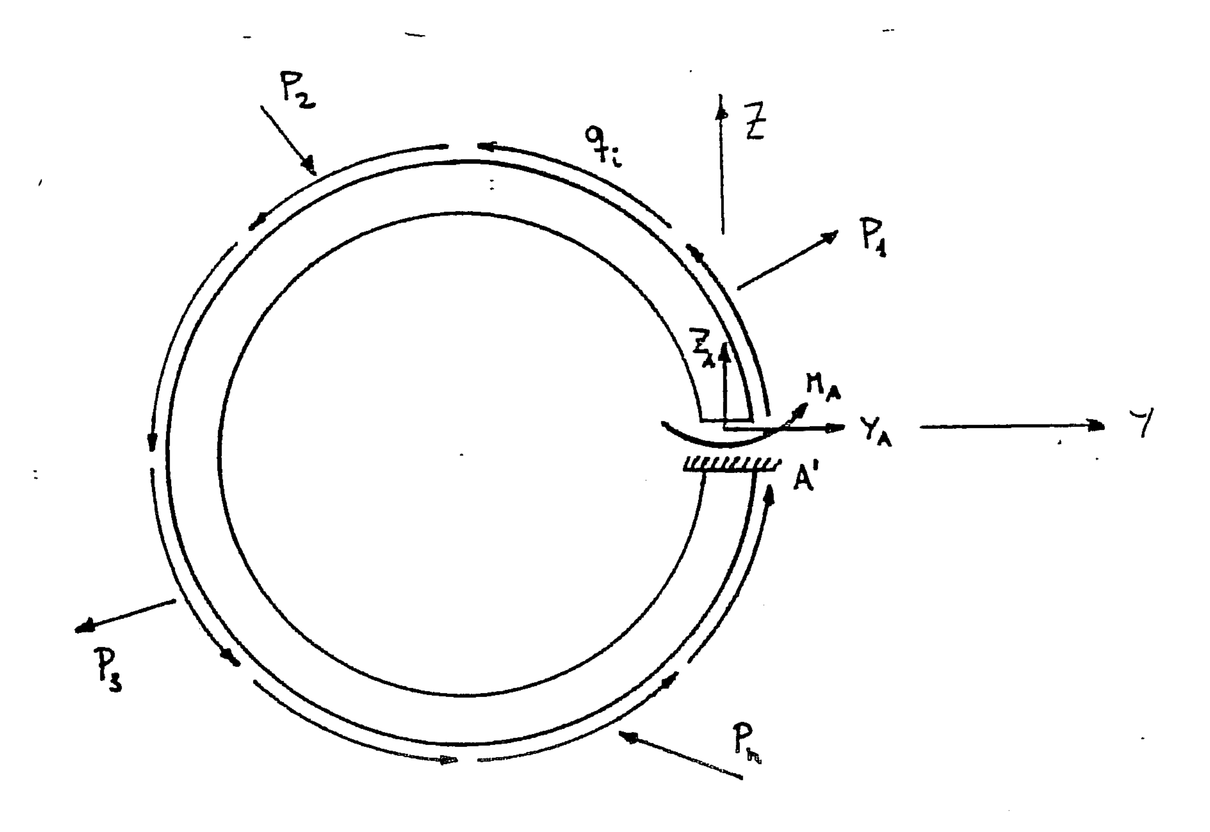


Figura 10.1: Sistema de fuerzas en una cuaderna

en donde m es la ley de momentos flectores en la cuaderna debidos a un momento unidad aplicado en la sección A:

$$m = 1$$

Por consiguiente:

$$\theta = \int_{cuad} \frac{M_s\, ds}{EI} + M_A \int_{cuad} \frac{ds}{EI} + Y_A \int_{cuad} \frac{z\, ds}{EI} - Z_A \int_{cuad} \frac{y\, ds}{EI} = 0$$

2. El desplazamiento en dirección Y de la sección A con respecto a la A' ha de ser nulo:

$$\Delta y = \int_{cuad} \frac{M\, m\, ds}{EI} = 0$$

en donde m es la ley de momentos flectores en la cuaderna debidos a una carga unidad aplicada en la sección A en dirección Y:

$$m = z$$

Por consiguiente:

$$\Delta y = \int_{cuad} \frac{M_s\, z\, ds}{EI} + M_A \int_{cuad} \frac{z\, ds}{EI} + Y_A \int_{cuad} \frac{z^2\, ds}{EI} - Z_A \int_{cuad} \frac{y\, z\, ds}{EI} = 0$$

3. El desplazamiento en dirección Z de la sección A con respecto a la A' ha de ser nulo:

$$\Delta z = \int_{cuad} \frac{M\, m\, ds}{EI} = 0$$

en donde m es la ley de momentos flectores en la cuaderna debidos a una carga unidad aplicada en la sección A en dirección Z:

$$m = -y$$

Por consiguiente:

$$\Delta z = -\int_{cuad} \frac{M_s\, y\, ds}{EI} - M_A \int_{cuad} \frac{y\, ds}{EI} - Y_A \int_{cuad} \frac{y\, z\, ds}{EI} + Z_A \int_{cuad} \frac{y^2\, ds}{EI} = 0$$

Con las tres ecuaciones obtenidas anteriormente se pueden determinar los valores de las tres incógnitas hiperestáticas. Sin embargo, a fín de simplificar estas ecuaciones, se puede suponer que la sección A está unida a un brazo rígido que termina en un punto O, que es el centro geométrico de los valores de ds/EI de la cuaderna (ver figura 10.2).

Si en la estructura real no se mueve la sección A con respecto a la A', el punto O tampoco lo hará, ya que se encuentra unido a la sección A por medio de un brazo indeformable.

Considerando un sistema de ejes con origen en O y refiriendo las incógnitas hiperestáticas a este punto, se pueden simplificar las ecuaciones anteriores. En efecto, al ser el punto O el centro de gravedad de los valores ds/EI de la estructura, se cumple:

$$\int_{cuad} \frac{y\, ds}{EI} = 0 \qquad \int_{cuad} \frac{z\, ds}{EI} = 0$$

En cuanto a las expresiones $\int y^2 ds/EI$, $\int z^2 ds/EI$ y $\int y\, z\, ds/EI$, que también aparecen en las ecuaciones anteriores, se denominan *momentos de inercia y producto de inercia elásticos* de la cuaderna respecto a los ejes Z e Y que pasan por el centro elástico de la misma. Por simplicidad, se representan mediante los símbolos:

$$I_{yy} = \int_{cuad} \frac{z^2 ds}{EI}$$

$$I_{zz} = \int_{cuad} \frac{y^2 ds}{EI}$$

$$I_{yz} = \int_{cuad} \frac{y\, z\, ds}{EI}$$

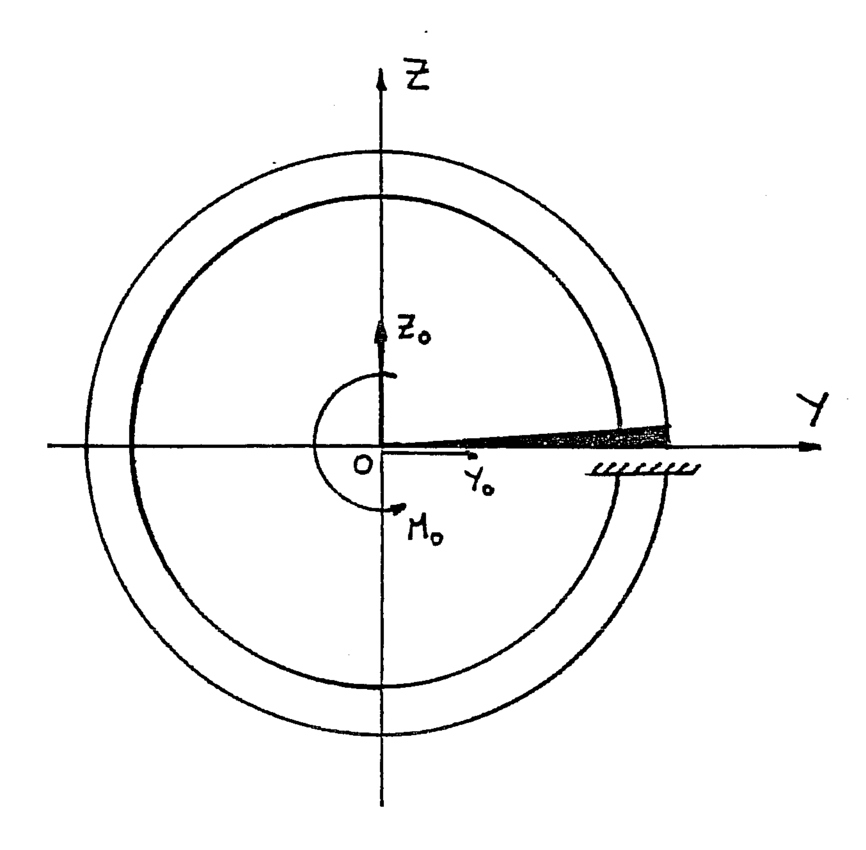


Figura 10.2: Solicitaciones en la sección A referidas al centro elástico de la cuaderna

Con estas simplificaciones, las ecuaciones anteriores se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\theta = \int_{cuad} \frac{M_s\, ds}{EI} + M_O \int_{cuad} \frac{ds}{EI} = 0$$

$$\Delta y = \int_{cuad} \frac{M_s\, z\, ds}{EI} + Y_O I_{yy} - Z_O I_{yz} = 0$$

$$\Delta z = -\int_{cuad} \frac{M_s\, y\, ds}{EI} - Y_O I_{yz} + Z_O I_{zz} = 0$$

Despejando queda:

$$M_O = -\frac{\displaystyle\int_{cuad} \frac{M_s ds}{EI}}{\displaystyle\int_{cuad} \frac{ds}{EI}}$$

$$Y_O = \frac{I_{yz} \displaystyle\int_{cuad} \frac{M_s y\, ds}{EI} - I_{zz} \int_{cuad} \frac{M_s z\, ds}{EI}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2}$$

$$Z_O = \frac{I_{yy} \int_{cuad} \frac{M_s y \, ds}{EI} - I_{yz} \int_{cuad} \frac{M_s z \, ds}{EI}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2}$$

Si la estructura es simétrica con respecto a un eje que pasa por su centro elástico:

$$I_{yz} = 0$$

luego las ecuaciones anteriores se simplifican a:

$$M_O = -\frac{\int_{cuad} \frac{M_s ds}{EI}}{\int_{cuad} \frac{ds}{EI}}$$

$$Y_O = -\frac{\int_{cuad} \frac{M_s z \, ds}{EI}}{I_{yy}}$$

$$Z_O = \frac{\int_{cuad} \frac{M_s y \, ds}{EI}}{I_{zz}}$$

10.1.2 Procedimiento de cálculo

Se tiene una cuaderna en equilibrio bajo la acción de unas cargas exteriores y del flujo reacción del revestimiento. El procedimiento a seguir será el siguiente:

1. Se divide la cuaderna en tramos. A fín de simplificar los cálculos, se considerará que los tramos son rectos. Dado que los tramos suelen ser de pequeña longitud, el error cometido será despreciable.

2. Se obtendrá el flujo de cortadura que ejerce el revestimiento sobre la cuaderna, de acuerdo con el procedimiento descrito anteriormente. Como resultado, se obtendrá un flujo constante en cada tramo.

3. Se determinará el valor de ds/EI correspondiente a cada tramo, así como la posición de su punto medio con respecto a unos ejes dados.

4. Se determinará la posición del centro elástico de la cuaderna, así como los valores de $\int ds/EI$, I_{yy}, I_{zz} e I_{yz}.

5. Se considerará que la cuaderna está abierta por la sección que corta al eje Y positivo y se determinará la ley de momentos flectores isostáticos M_s, calculando su valor en cada uno de los *booms* que separan los tramos:

$$M_s = M_{sq} + M_{sp}$$

en donde:

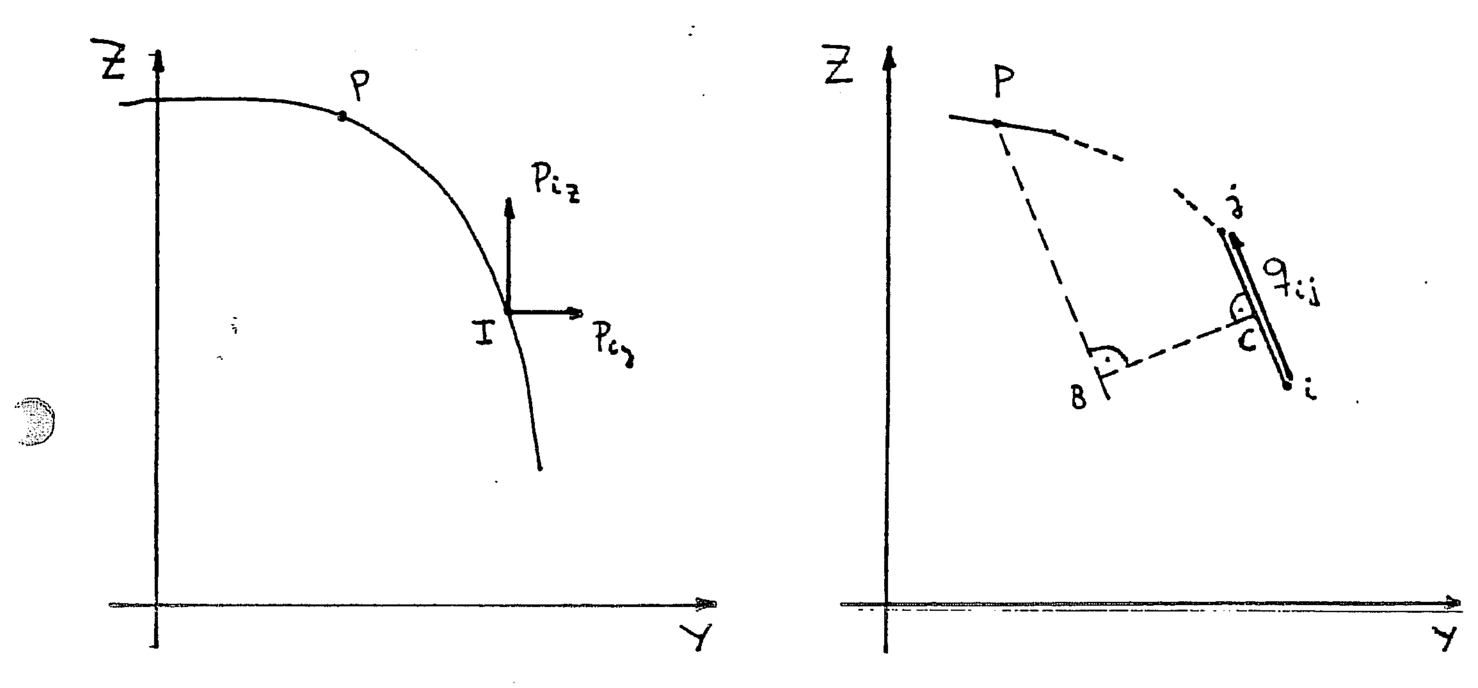


Figura 10.3: Momentos isostáticos en un punto P

- M_{sq} es el momento flector debido a los flujos de cortadura. El momento flector en un punto $P(y_p, z_p)$ debido al flujo en un tramo $i-j$ será igual al valor del flujo por la longitud del tramo y por la distancia del punto P a la recta $i-j$ (ver figura 10.3 derecha):

$$M_{sq_{i,j}} = q_{i,j} \cdot L_{i,j} \cdot \bar{BC}$$

$$M_{sq_{i,j}} = q_{i,j} \cdot L_{i,j} \cdot \frac{A_{i,j}y_p + B_{i,j}z_p + C_{i,j}}{\sqrt{A_{i,j}^2 + B_{i,j}^2}}$$

en donde:

$$A_{i,j} = (z_j - z_i)$$

$$B_{i,j} = -(y_j - y_i)$$

$$C_{i,j} = -(z_j - z_i)y_i + (y_j - y_i)z_i$$

El valor de $M_{sq_{i,j}}$ será positivo si produce tracciones en la fibras internas de la cuaderna.

Por consiguiente, el momento flector debido a los flujos de cortadura en un punto P situado en el tramo n vale:

$$M_{sq} = \sum_{i=1}^{n-1} M_{sq_i}$$

- M_{sp} es el momento flector debido a las cargas exteriores. El momento flector en un punto $P(y_p, z_p)$ debido a una carga P_{i_y} será igual a (ver figura 10.3 izquierda):

  $$M_{sp_{i_y}} = P_{i_y} \cdot (z_p - z_i)$$

  y debido a una carga P_{i_z}:

  $$M_{sp_{i_z}} = -P_{i_z} \cdot (y_p - y_i)$$

  Los valores de $M_{sp_{i_y}}$ y $M_{sp_{i_z}}$ serán positivos si producen tracciones en la fibras internas de la cuaderna.
  Por consiguiente, el momento flector en un punto P debido a las cargas exteriores vale:

  $$M_{sp} = \sum(M_{sp_{i_z}} + M_{sp_{i_z}})$$

  estando el sumatorio extendido a todas las cargas existentes entre el extremo libre y el punto P.

6. Se calcularán los valorez de $M_s y$, $M_s z$ y $M_s y\, z$ correspondientes a cada *boom*.

7. Se calculará (por medio de la regla de Simpson, por ejemplo) los valores de:

$$\int \frac{M_s ds}{EI}$$

$$\int \frac{M_s y\, ds}{EI}$$

$$\int \frac{M_s z\, ds}{EI}$$

8. Se determinarán los valores de M_O, Y_O y Z_O mediante las expresiones deducidas en el apartado anterior.

9. La ley de momentos flectores será:

$$M = M_s + M_O + Y_O z - Z_O y$$

10.1.3 Ejemplo

Se desea calcular la ley de momentos flectores en la cuaderna mostrada en la figura 10.4. El radio de la cuaderna es 500 mm y su EI es constante.

<u>**Solución**</u>

En primer lugar sería necesario analizar la sección del revestimiento en que está situada la cuaderna bajo la acción de las cargas axiales y de flexión existentes en la

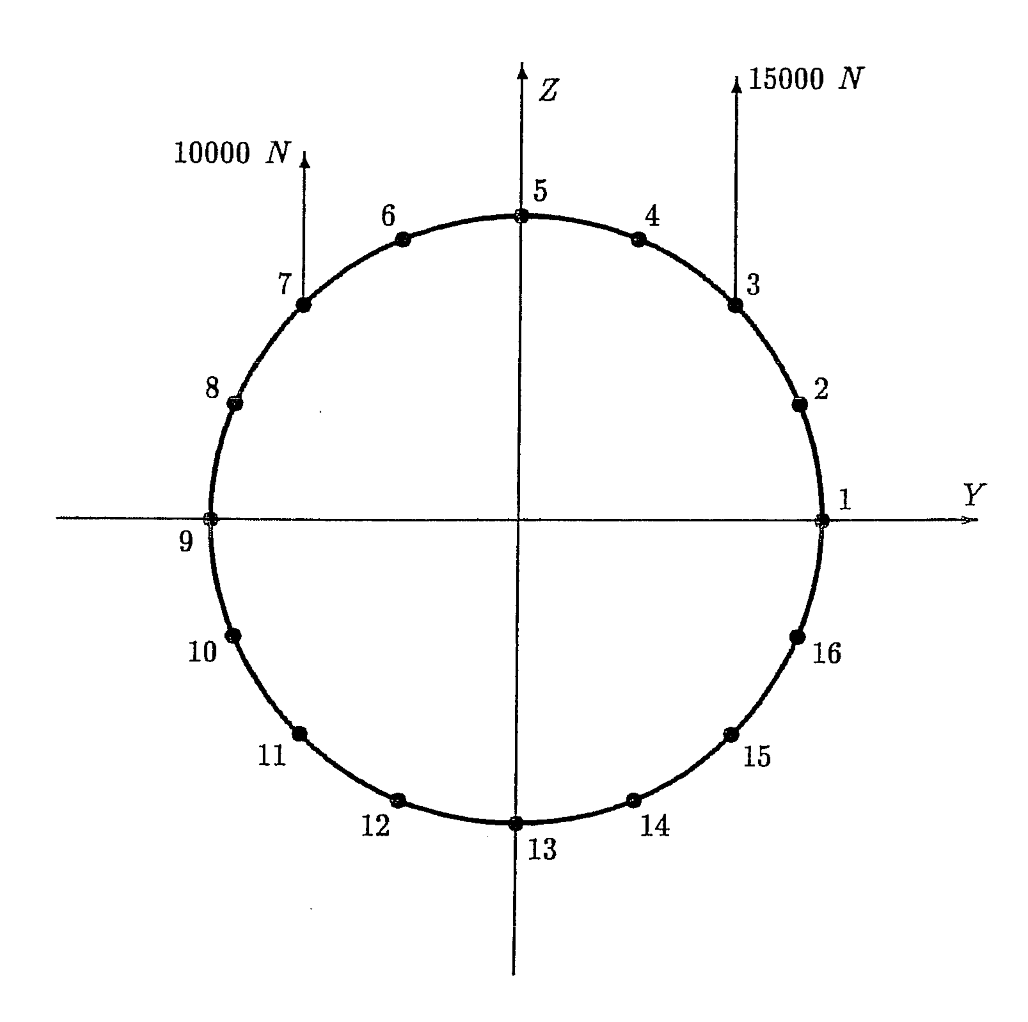


Figura 10.4: Cuaderna del ejemplo

misma, a fín de obtener la sección efectiva. Esto se realizaría siguiendo los procedimientos descritos en el Capítulo 8. Se supone que se ha hecho este análisis y que se ha obtenido que el área de cada *boom* es igual a 100 mm^2. Evidentemente este resultado no es correcto, dado que los elementos a compresión tendrán menor área efectiva que los que están a tracción. Pero como lo que se quiere es hacer un ejemplo de cómo se obtiene la ley de momentos flectores, se supondrá que las áreas de todos los *booms* son iguales, lo cual simplificará los cálculos de los flujos de cortadura.

En la tabla 10.1 se dan las áreas y las posiciones de los *booms*.

Boom	cA_b	Y	Z
1	100	500.0	0.0
2	100	461.9	191.3
3	100	353.6	353.6
4	100	191.3	461.9
5	100	0.0	500.0
6	100	−191.3	461.9
7	100	−353.6	353.6
8	100	−461.9	191.3
9	100	−500.0	0.0
10	100	−461.9	−191.3
11	100	−353.6	−353.6
12	100	−191.3	−461.9
13	100	0.0	−500.0
14	100	191.3	−461.9
15	100	353.6	−353.6
16	100	461.9	−191.3

Tabla 10.1: Propiedades de la sección efectiva del revestimiento

De acuerdo con los datos de la tabla 10.1, las propiedades de la sección efectiva del revestimiento son:

$$Area = 1600\ mm^2$$

$$Y_g = Z_g = 0.0$$

$$I_{yy} = I_{zz} = 2 \times 10^8\ mm^4$$

$$I_{yz} = 0.0$$

$$k_1 = \frac{I_{yz}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} = 0.0$$

$$k_2 = \frac{I_{zz}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} = 0.5 \times 10^{-8}$$

$$k_3 = \frac{I_{yy}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} = 0.5 \times 10^{-8}$$

Las resultantes de las cargas que actúan en la sección, referidas al centro geométrico de la misma, son:

$$S_y = 0$$

$$S_z = 15000 + 10000 = 25000\ N$$

$$M_x = (15000 - 10000) \times \frac{500}{\sqrt{2}} = 1767765\ N \cdot mm$$

Para calcular los flujos de cortadura sobre el revestimiento se supondrá en principio que la sección está abierta por el panel de revestimiento 1-2. De acuerdo con ésto, los flujos en los tramos se obtienen mediante la expresión:

$$q_{b_{r,r+1}} = q_{b_{r-1,r}} - [(k_3 S_y - k_1 S_z)(Y_r - Y_g) + (k_2 S_z - k_1 S_y)(Z_r - Z_g)]cA_{b_r}$$

Teniendo en cuenta los datos anteriores, la expresión anterior se reduce a:

$$q_{b_{r,r+1}} = q_{b_{r-1,r}} - 1.25 \times 10^{-2} \times Z_r$$

Por consiguiente, los flujos en los distintos tramos valen:

$$q_{b_{1,2}} = 0$$

$$q_{b_{2,3}} = q_{b_{1,2}} - 1.25 \times 10^{-2} \times Z_2 = -2.39$$
$$q_{b_{3,4}} = q_{b_{2,3}} - 1.25 \times 10^{-2} \times Z_3 = -6.81$$
$$q_{b_{4,5}} = q_{b_{3,4}} - 1.25 \times 10^{-2} \times Z_4 = -12.59$$
$$q_{b_{5,6}} = q_{b_{4,5}} - 1.25 \times 10^{-2} \times Z_5 = -18.84$$
$$q_{b_{6,7}} = q_{b_{5,6}} - 1.25 \times 10^{-2} \times Z_6 = -24.61$$
$$q_{b_{7,8}} = q_{b_{6,7}} - 1.25 \times 10^{-2} \times Z_7 = -29.03$$
$$q_{b_{8,9}} = q_{b_{7,8}} - 1.25 \times 10^{-2} \times Z_8 = -31.42$$
$$q_{b_{9,10}} = q_{b_{8,9}} - 1.25 \times 10^{-2} \times Z_9 = -31.42$$
$$q_{b_{10,11}} = q_{b_{9,10}} - 1.25 \times 10^{-2} \times Z_{10} = -29.03$$
$$q_{b_{11,12}} = q_{b_{10,11}} - 1.25 \times 10^{-2} \times Z_{11} = -24.61$$
$$q_{b_{12,13}} = q_{b_{11,12}} - 1.25 \times 10^{-2} \times Z_{12} = -18.84$$
$$q_{b_{13,14}} = q_{b_{12,13}} - 1.25 \times 10^{-2} \times Z_{13} = -12.59$$
$$q_{b_{14,15}} = q_{b_{13,14}} - 1.25 \times 10^{-2} \times Z_{14} = -6.81$$
$$q_{b_{15,16}} = q_{b_{14,15}} - 1.25 \times 10^{-2} \times Z_{15} = -2.39$$
$$q_{b_{16,1}} = q_{b_{15,16}} - 1.25 \times 10^{-2} \times Z_{16} = 0$$

Los flujos totales se determinarán sumando a los calculados anteriormente un flujo incógnita, q_I, que se supondrá que tiene una dirección contraria a la de las agujas del reloj.

Para determinar el valor de q_I se planteará que el momento resultante con respecto a cualquier punto de los flujos de cortadura ha de ser igual al momento de las fuerzas aplicadas:

$$M_S = M_P + M_q$$

Tomando momentos con respecto al punto $O(0,0)$ y considerandolos positivos si tienen sentido contrario al de las agujas del reloj:

- Momento de las fuerzas aplicadas:

$$M_S = M_x = 1767765 \ N \cdot mm$$

- Momento de los flujos de cortadura que actúan en la sección (ver Apartado 8.5 del Capítulo 8):

$$M_q = 2 \sum_n A_n q_{b_n} + 2 A_I q_I$$

Siendo:

$$A_n = \frac{500^2 \times \sin 22.5^\circ}{2} = 47835 \ mm^2$$

y:

$$A_I = 16 \cdot A_n = 765367 \ mm^2$$

Por tanto, teniendo en cuenta las direcciones de los flujos q_b, queda:

$$M_q = 2 \times 47835 \times (-251.38) + 2 \times 765367 \times q_I$$

Por consiguiente, la ecuación es:

$$1767765 = 2 \times 47835 \times (-251.38) + 2 \times 765367 \times q_I$$

Luego:

$$q_I = 16.87 \ N/mm$$

Por consiguiente los flujos totales en los distintos tramos serán:

$$
\begin{aligned}
q_{1,2} &= q_{b_{1,2}} + q_I = 16.87\ N/mm \\
q_{2,3} &= q_{b_{2,3}} + q_I = 14.48\ N/mm \\
q_{3,4} &= q_{b_{3,4}} + q_I = 10.06\ N/mm \\
q_{4,5} &= q_{b_{4,5}} + q_I = 4.28\ N/mm \\
q_{5,6} &= q_{b_{5,6}} + q_I = -1.97\ N/mm \\
q_{6,7} &= q_{b_{6,7}} + q_I = -7.74\ N/mm \\
q_{7,8} &= q_{b_{7,8}} + q_I = -12.16\ N/mm \\
q_{8,9} &= q_{b_{8,9}} + q_I = -14.55\ N/mm \\
q_{9,10} &= q_{b_{9,10}} + q_I = -14.55\ N/mm \\
q_{10,11} &= q_{b_{10,11}} + q_I = -12.16\ N/mm \\
q_{11,12} &= q_{b_{11,12}} + q_I = -7.74\ N/mm \\
q_{12,13} &= q_{b_{12,13}} + q_I = -1.97\ N/mm \\
q_{13,14} &= q_{b_{13,14}} + q_I = 4.28\ N/mm \\
q_{14,15} &= q_{b_{14,15}} + q_I = 10.06\ N/mm \\
q_{15,16} &= q_{b_{15,16}} + q_I = 14.48\ N/mm \\
q_{16,1} &= q_{b_{16,1}} + q_I = 16.87\ N/mm
\end{aligned}
$$

Estos son los flujos que ejerce la cuaderna sobre el revestimiento. Los flujos reacción que ejerce el revestimiento sobre la cuaderna son los opuestos. En consecuencia, la cuaderna está en equilibrio bajo la acción de las cargas mostradas en la figura 10.5.

A continuación se determinará la posición del centro elástico de la cuaderna, así como sus propiedades elásticas. Al ser la cuaderna circular y tener un EI constante, su centro elástico es el punto $O(0,0)$, y:

$$\int_{cuad} \frac{ds}{EI} = \frac{2\pi R}{EI} = \frac{3142}{EI}$$

$$I_{yy} = \int_{cuad} \frac{z^2 ds}{EI} = \frac{\pi R^3}{EI} = \frac{392699082}{EI}$$

$$I_{zz} = \int_{cuad} \frac{y^2 ds}{EI} = \frac{\pi R^3}{EI} = \frac{392699082}{EI}$$

$$I_{yz} = \int_{cuad} \frac{y\, z\, ds}{EI} = 0$$

Sin embargo, en la tabla 10.2 se incluyen los cálculos que se harían en un caso

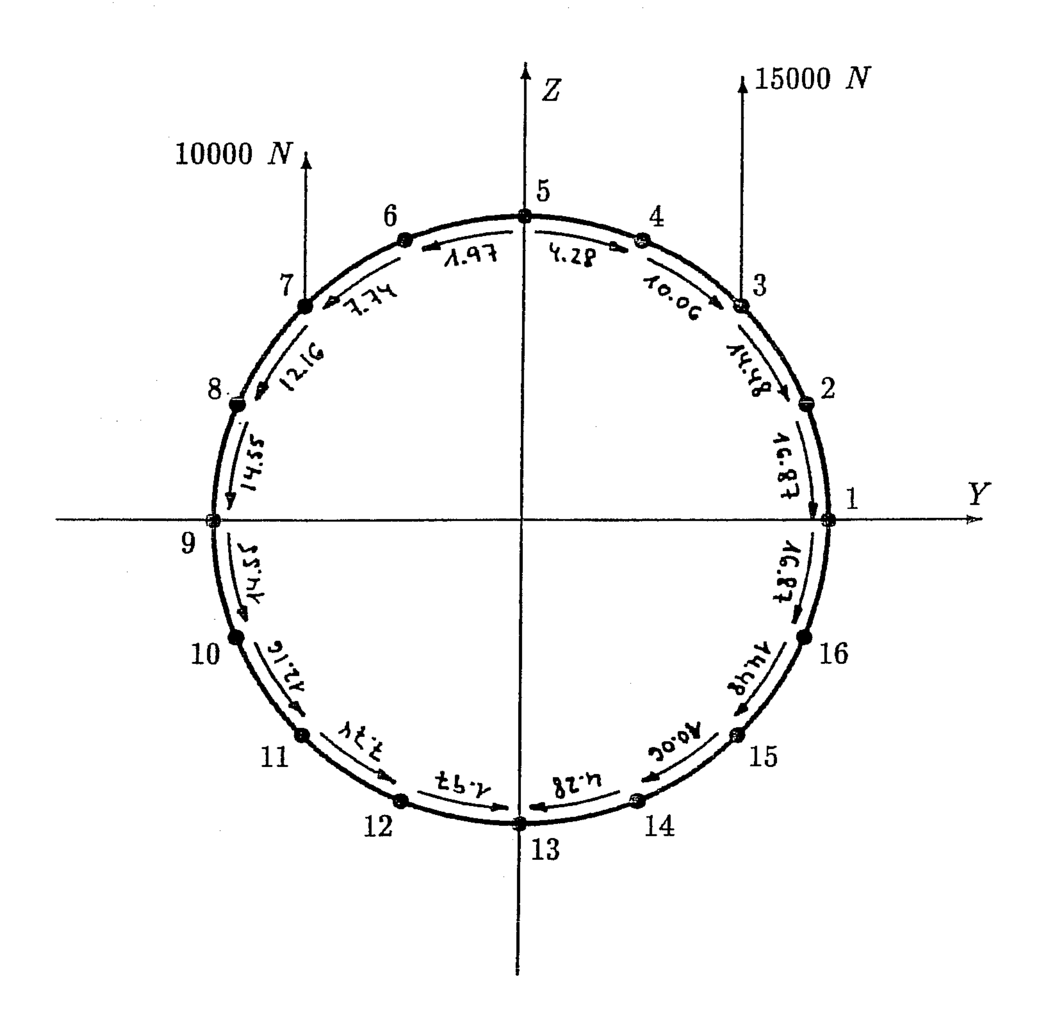


Figura 10.5: Cargas sobre la cuaderna

general, considerando los tramos rectos:

Tramo	(Y_i, Z_i)	(Y_j, Z_j)	$\bar{Y}$	$\bar{Z}$	δs
1– 2	(500.0, 0.0)	(461.9, 191.3)	481.0	95.7	195.1
2– 3	(461.9, 191.3)	(353.6, 353.6)	407.7	272.4	195.1
3– 4	(353.6, 353.6)	(191.3, 461.9)	272.4	407.7	195.1
4– 5	(191.3, 461.9)	(0.0, 500.0)	95.7	481.0	195.1
5– 6	(0.0, 500.0)	(−191.3, 461.9)	−95.7	481.0	195.1
6– 7	(−191.3, 461.9)	(−353.6, 353.6)	−272.4	407.7	195.1
7– 8	(−353.6, 353.6)	(−461.9, 191.3)	−407.7	272.4	195.1
8– 9	(−461.9, 191.3)	(−500.0, 0.0)	−481.0	95.7	195.1
9–10	(−500.0, 0.0)	(−461.9, −191.3)	−481.0	−95.7	195.1
10–11	(−461.9, −191.3)	(−353.6, −353.6)	−407.7	−272.4	195.1
11–12	(−353.6, −353.6)	(−191.3, −461.9)	−272.4	−407.7	195.1
12–13	(−191.3, −461.9)	(0.0, −500.0)	−95.7	−481.0	195.1
13–14	(0.0, −500.0)	(191.3, −461.9)	95.7	−481.0	195.1
14–15	(191.3, −461.9)	(353.6, −353.6)	272.4	−407.7	195.1
15–16	(353.6, −353.6)	(461.9, −191.3)	407.7	−272.4	195.1
16– 1	(461.9, −191.3)	(500.0, 0.0)	481.0	−95.7	195.1

Tabla 10.2: Propiedades elásticas de la cuaderna

De acuerdo con los datos de la tabla 10.2, las propiedades elásticas de la cuaderna son las siguientes:

$$\int_{cuad} \frac{ds}{EI} = \frac{\sum \delta s}{EI} = \frac{3121}{EI}$$

$$\int_{cuad} \frac{y\, ds}{EI} = \frac{\sum \bar{Y} \delta s}{EI} = 0.0$$

$$\int_{cuad} \frac{z\, ds}{EI} = \frac{\sum \bar{Y} \delta s}{EI} = 0.0$$

$$Y_e = \frac{\int_{cuad} \frac{y\, ds}{EI}}{\int_{cuad} \frac{ds}{EI}} = 0.0$$

$$Z_e = \frac{\int_{cuad} \frac{z\, ds}{EI}}{\int_{cuad} \frac{ds}{EI}} = 0.0$$

$$I_{yy} = \int_{cuad} \frac{z^2 ds}{EI} = \frac{\sum (\bar{Z} - Z_e)^2 \delta s}{EI} = \frac{375330278}{EI}$$

$$I_{zz} = \int_{cuad} \frac{y^2 ds}{EI} = \frac{\sum(\bar{Y} - Y_e)^2 \delta s}{EI} = \frac{375330278}{EI}$$

$$I_{yz} = \int_{cuad} \frac{y\, z\, ds}{EI} = \frac{\sum(\bar{Y} - Y_e)(\bar{Z} - Z_e)\delta s}{EI} = 0.0$$

Como se puede comprobar, las diferencias con respecto a los valores exactos son menores del 5%.

El siguiente paso será calcular los momentos flectores en la cuaderna considerando que está abierta por el *boom* 1. En la tabla 10.3 se incluyen los resultados obtenidos aplicando las expresiones indicadas en el Apartado anterior.

Boom	M_{sq}	M_{sp_3}	M_{sp_7}	M_s
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	−245643	0	0	−245643
4	−910340	2433175	0	1522835
5	−2039334	5303301	0	3263967
6	−3523082	8173427	0	4650345
7	−5107002	10606602	0	5499599
8	−6437160	12232397	1083864	6879101
9	−7133883	12803301	1464466	7133883
10	−6879101	12232397	1083864	6437160
11	−5499599	10606602	0	5107002
12	−3028228	8173427	−1622117	3523082
13	271567	5303301	−3535534	2039334
14	3926116	2433175	−5448951	910340
15	7316711	0	−7071068	245643
16	9780727	−1625796	−8154932	0
1	10732233	−2196699	−8535534	0

Tabla 10.3: Momentos flectores isostáticos a lo largo de la cuaderna

En la tabla 10.4 se incluyen los cálculos necesarios para determinar los valore

de $\int M_s ds/EI$, $\int M_s y ds/EI$ y $\int M_s z ds/EI$.

Boom	Y	Z	M_s	$M_s(Y-Y_e)$	$M_s(Z-Z_e)$
1	500.0	0.0	0	0	0
2	461.9	191.3	0	0	0
3	353.6	353.6	−245643	−86847998	−86847998
4	191.3	461.9	1522835	291381928	703458201
5	0.0	500.0	3263967	0	1631983564
6	−191.3	461.9	4650345	−889804898	2148179053
7	−353.6	353.6	5499599	−1944402002	1944402002
8	−461.9	191.3	6879101	−3177730504	1316259072
9	−500.0	0.0	7133883	−3566941738	0
10	−461.9	−191.3	6437160	−2973580040	−1231697182
11	−353.6	−353.6	5107002	−1805597998	−1805597998
12	−191.3	−461.9	3523082	−674112575	−1627451720
13	0.0	−500.0	2039334	0	−1019666865
14	191.3	−461.9	910340	174185975	−420522143
15	353.6	−353.6	245643	86847998	−86847998
16	461.9	−191.3	0	0	0
1	500.0	0.0	0	0	0

Tabla 10.4

Aplicando la regla de Simpson a los valores de la tabla 10.4 se obtiene:

$$\int \frac{M_s ds}{EI} = \frac{9219905111}{EI}$$

$$\int \frac{M_s y\, ds}{EI} = \frac{-2837427714998}{EI}$$

$$\int \frac{M_s z\, ds}{EI} = \frac{306145523138}{EI}$$

En consecuencia:

$$M_O = -\frac{\int_{cuad} \frac{M_s ds}{EI}}{\int_{cuad} \frac{ds}{EI}} = -\frac{9219905111}{3121} = -2953730$$

$$Y_O = -\frac{\int_{cuad} \frac{M_s z\, ds}{EI}}{I_{yy}} = -\frac{306145523138}{375330278} = -816$$

$$Z_O = \frac{\int_{cuad} \frac{M_s y\, ds}{EI}}{I_{zz}} = \frac{-2837427714998}{375330278} = -7560$$

Los momentos flectores totales se obtienen mediante la expresión:

$$M = M_s + M_O + Y_O(Z - Z_e) - Z_O(Y - Y_e)$$

En la tabla 10.5 se incluyen los momentos flectores totales a lo largo de la cuaderna:

Boom	Y	Z	M
1	500.0	0.0	826178
2	461.9	191.3	382378
3	353.6	353.6	−814957
4	191.3	461.9	−361176
5	0.0	500.0	−97597
6	−191.3	461.9	−126684
7	−353.6	353.6	−415312
8	−461.9	191.3	277121
9	−500.0	0.0	400246
10	−461.9	−191.3	147322
11	−353.6	−353.6	−231143
12	−191.3	−461.9	−500365
13	0.0	−500.0	−506561
14	191.3	−461.9	−220092
15	353.6	−353.6	253095
16	461.9	−191.3	694521
1	500.0	0.0	826178

Tabla 10.5: Momentos flectores totales a lo largo de la cuaderna

Bibliografía

[1] *"Estructuras del avión"*
JOHN CUTLER
Paraninfo. 1984

[2] *"Aircraft Structures"*
T. H. G. MEGSON
Edward Arnold. 1990

[3] *"Analysis and Design of Flight Vehicle Structures"*
E. F. BRUHN
Tri-State Offset Company. 1965

[4] *"Aircraft Structures"*
DAVID J. PEERY
McGraw-Hill Book Company. 1949

[5] *"Airplane Structures"*
A. S. NILES y J. S. NEWELL
John Wiley & sons. 1954

[6] *"Mecánica de Vuelo"*
A. C. KERMODE
Paraninfo. 1985